Examen 1

Les objets électroniques (calculette, tablette, smartphone, etc.) doivent être rangés éteints dans les sacs durant lépreuve. Tout objet de ce type allumé pendant lépreuve sera saisi. Les documents papiers autres que les copies et le brouillon ne sont pas ad- mis. Lusage de la couleur rouge est proscrit également. Tout résultat sera justifié avec soin et détail.

3 exercices à résoudre en 2h

Exercice 1 – Du cours

Question 1 : Énoncez le Théorème de Lax-Milgram.

Question 2 : Donnez la définition mathématique de la dérivée faible.

Question 3 : Énoncez la Formule de Green pour un ouvert Ω de classe $\mathscr{C}^1$ et $u\in\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$.

Question 4 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, borné et régulier de classe $\mathscr{C}^1$, de normal unitaire sortante $\mathbf{n}$, $u\in\mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$, et $v\in\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$. Redémontrez la formule suivante

$$\int_\Omega \Delta u(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\,v(x)\,\mathrm{d}s,$$

où $\Delta u = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq 3}$ est le vecteur gradient de u, et $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u\cdot\mathbf{n} = \partial_{\mathbf{n}} u$.

Exercice 2 – Formulation faible

Dans cet exercice, on considère le domaine Ω décrit par la figure 1. Son bord $\partial\Omega$ est décomposé en deux parties $\Gamma_1 := \{(x,y)\in\partial\Omega \text{ tel que } x=0\}$ (en gras sur la figure) et $\Gamma_0 := \partial\Omega\setminus\Gamma_1$ (“le reste”). Nous avons donc $\partial\Omega = \Gamma_0\cup\Gamma_1$. Soient les fonctions $f\in L^2(\Omega)$, $g\in L^2(\Gamma_1)$ et la quantité $\eta>1$. On considère le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u+\eta u &=& f & (\Omega),\\ \partial_{\mathbf{n}} u &=& 0 & (\Gamma_0),\\ \partial_{\mathbf{n}} u &=& g & (\Gamma_1).\end{array}\right. \tag{1}$$

Nous supposons dans cet exercice que les fonctions u, f et g à valeurs réelles.

Question 1 : En précisant explicitement l’espace fonctionnel V et sa norme $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$, donnez la formulation variationnelle du problème (1) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u\in V \text{ tel que}\\ \forall v\in V,\quad a(u,v)=\ell(v).\end{array}\right. \tag{2}$$

Question 2 : Nous rappelons que pour une partie Γ du bord $\partial\Omega$, la norme dans $L^2(\Gamma)$ est donnée par $\|w\|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma |w(x)|^2\,\mathrm{d}x$.

$$\text{Montrez que : } \forall w\in L^2(\partial\Omega),\qquad \|w\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq \|w\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

En déduire qu’il existe une constante $C>0$ telle que $\|w\|_{L^2(\Gamma_1)}\leq C\|w\|_{H^1(\Omega)}$.

Question 3 : Démontrez que le problème (2) admet une unique solution.

Question 4 : Écrivez un code en language GMSH qui permettrait d’obtenir la géométrie désirée (c’est-à-dire Ω). Nous précisons et rappelons que :

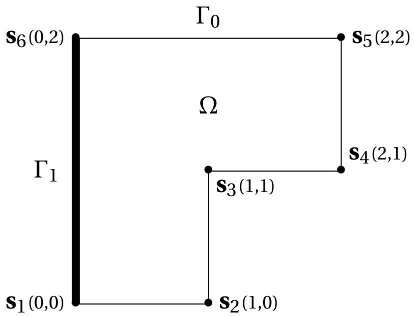


FIG. 1 : Domaine Ω de l'Exercice

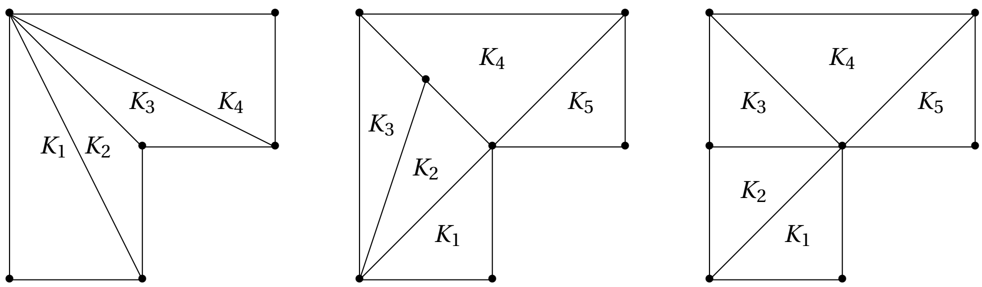
- *Pour séparer Γ_0 et Γ_1 dans le fichier de maillage, il faut pour cela définir deux* `Physical Line`*. Rassurez-vous : la note de l'examen ne prend pas en compte la présence ou l'absence de* `Physical` *dans votre code*
- *Nous rappelons quelques syntaxes propre à GMSH :*
  - `Point(i)= {x, y, z, h};`
  - `Line(i)= {point1, point2};`
  - `Line Loop(i)= {line1, line2, ..., lineN};`
  - `Plane Surface(i)= {lineloop1, lineloop2, ..., lineloopN};`

Question 5 : On souhaite résoudre le problème (2) à l'aide d'une méthode éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. Rappelez la définition de l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange basé sur une triangulation $\mathscr{T}_h$ (non encore précisée). Cet espace sera noté V_h.

Question 6 : Démontrez que le problème ci-dessous admet une unique solution

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que}\\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h).\end{array}\right.$$

Question 7 : Trois triangulations nous sont présentées sur la Figure 2. Avec justification, dites pour chacune d'elle si elle est, oui ou non, acceptable pour la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$.



(a) $T_{h,1}$ (b) $T_{h,2}$ (c) $T_{h,3}$

FIG. 2 : Triangulations de Ω

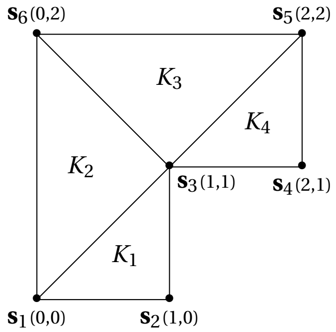


FIG. 3 : Triangulation $\mathscr{T}_h$

Question 8 : À partir de maintenant, nous utilisons la triangulation de la Figure 3, que nous appelerons $\mathscr{T}_h$. Quelle est alors la dimension de V_h ?

Question 9 : Nous notons φ_j les fonctions de V_h telles que $\varphi_j(\mathbf{s}_j) = 1$ et $\varphi_j(\mathbf{s}_i) = 0$ si $i \neq j$. Calculez l'expression explicite des 6 fonctions φ_j, $j = 1, \dots, 6$, sur le triangle K_2.

Exercice 3 – Deux petites formules

On considère le carré unité $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ et une triangulation régulière comme présentée sur la Figure 4. Le segment $[0,1]$ est discrétisé de manière homogène par N points dans la direction x et N dans la direction y, soit $N_s = N^2$ sommets. Par exemple, sur la Figure 4, nous avons $N = 5$ et $N_s = 25$. Le domaine Ω est ensuite quadrillé puis triangulé en division chaque carré en deux triangles rectangles.

Question 1 : En notant N_t le nombre de triangles obtenu par une telle triangulation, donnez la relation entre N_t et N_s dans le cas général.

Question 2 : En $3D$, plaçons nous dans le cube unité $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$. Nous discrétisons chaque segment $[0,1]$ avec N points (dans chaque direction x, y et z). Avec la même idée que pour la question précédente et sachant qu'un cube peut se décomposer en 5 tétraèdres (sans rajouter de sommet), donnez une relation entre le nombre de tétrahèdres N_T et le nombre total de sommets $N_s = N^3$.

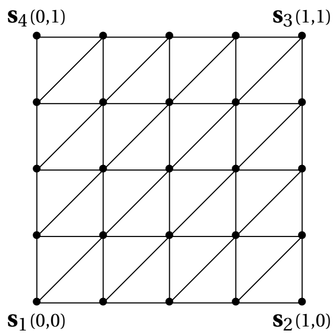


FIG. 4 : Exemple de maillage régulier du carré unité avec $N = 5$ et $N_s = 25$.