Examen 2

Les objets électroniques (calculette, tablette, smartphone, etc.) doivent être rangés éteints dans les sacs durant lépreuve. Tout objet de ce type allumé pendant lépreuve sera saisi. Les documents papiers autres que les copies et le brouillon ne sont pas admis. L'usage de la couleur rouge est proscrit également. ***Tout résultat sera justifié avec soin et détail. Tout résultat parachuté sera considéré comme nul.***

3 exercices à résoudre en 2h

Exercice 1 – Du cours

Question 1 : Soient $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions définie sur Ω et de carré intégrable et $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev des fonctions $L^2(\Omega)$ admettant une dérivée faible. Donnez l'expression des produits scalaires et des normes usuels sur $L^2(\Omega)$ et sur $H^1(\Omega)$.

Question 2 : Énoncez (un des deux) Théorème(s) de l'inégalité de Poincaré.

Question 3 : Pour un domaine polygonal Ω et une triangulation régulière $\mathscr{T}_h$ de Ω, donnez la définition de l'espace V_h^2 éléments finis $\mathbb{P}^2-$Lagrange sur $\mathscr{T}_h$, ainsi que sa dimension.

Exercice 2 – Résolution d'un problème

Dans cet exercice, on considère le domaine Ω décrit par la figure 1. Son bord $\partial\Omega$ est décomposé en deux parties $\Gamma_D := \{(x, y) \in \partial\Omega \text{ tel que } x = 0\}$ (en gras sur la figure) et $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ ("le reste"). Nous avons donc $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Soient les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$ et $g \in \mathscr{C}^0(\Gamma_N)$. On considère le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & (\Omega), \\ u & = & 0 & (\Gamma_D), \\ \partial_{\mathbf{n}} u & = & g & (\Gamma_N). \end{array}\right. \tag{1}$$

Nous supposons dans cet exercice que les fonctions u, f et g à valeurs réelles et $h > 0$ une constante.

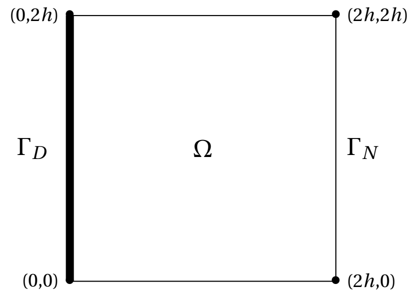


FIG. 1 : Domaine Ω de l'Exercice

Question 1 : En précisant explicitement l'espace fonctionnel V et sa norme $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$, donnez la formulation variationnelle du problème (1) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u, v) = \ell(v). \end{array}\right. \tag{2}$$

Question 2 : Démontrez que le problème (2) admet une unique solution. Justifiez soigneusement chaque ligne.

Question 3 : On souhaite résoudre le problème (2) à l'aide d'une méthode éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. Rappelez la définition de l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange basé sur une triangulation $\mathscr{T}_h$ (non encore précisée). Cet espace sera noté V_h.

Nous notons N_s le nombre de sommets de $\mathscr{T}_h$ et $(\Phi_J)_{J=1,\dots,N_s}$ les fonctions de forme de V_h, c'est à dire telle que $\Phi_J(\mathbf{s}_I) = \delta_{I,J}$ pour $I, J = 1,\dots,N_s$. Les indices globaux seront notés en majuscule ($I, J = 1,\dots,N_s$) tandis que les indices locaux le seront en minuscules ($i, j = 1,\dots,3$).

Question 4 : Montrez que cette famille $(\Phi_J)_{1\leq J\leq N_s}$ forme une base de V_h.

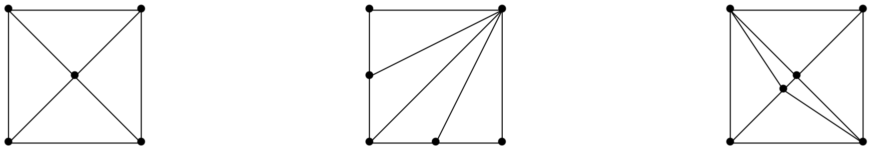
Question 5 : Démontrez que le problème ci-dessous admet une unique solution

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que}\\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h).\end{array}\right. \tag{3}$$

Question 6 : Trois triangulations de Ω nous sont présentées sur la Figure 2.

1) Avec justification, dites pour chacune d'elle si elle oui ou non acceptable pour la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$.

2) En rappelant une condition sur la forme des éléments triangulaires pour qu'un maillage soit de bonne qualité pour la méthode des éléments finis (même "avec les mains"), classez les maillages acceptables par qualité croissante.



(a) $\mathscr{T}_{h,1}$ (b) $\mathscr{T}_{h,2}$ (c) $\mathscr{T}_{h,3}$

FIG. 2 : Triangulations proposées de Ω

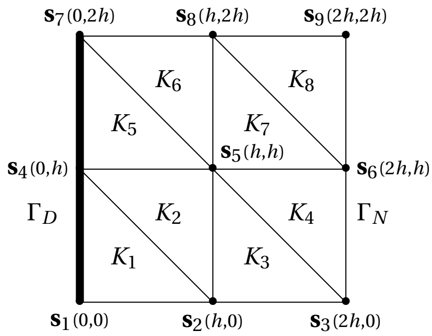


FIG. 3 : Triangulation $\mathscr{T}_h$

Question 7 : Dans le triangle de référence $\widehat{K}$ de sommet $\widehat{\mathbf{s}}_1(0,0)$, $\widehat{\mathbf{s}}_2(1,0)$ et $\widehat{\mathbf{s}}_3(0,1)$, nous notons $\widehat{\varphi}_j$ les fonctions $\mathbb{P}^1(\widehat{K})$ telles que $\widehat{\varphi}_j(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \delta_{i,j}$, pour $i, j = 1,2,3$. Nous noterons (ξ, η) les coordonnées paramétriques dans $\widehat{K}$.

1) Redonnez l'expression exacte des trois fonctions de forme $\widehat{\varphi}_1$, $\widehat{\varphi}_2$ et $\widehat{\varphi}_3$ ainsi que de leur gradient.

2) En déduire la valeur des trois intégrales suivantes pour $j = 1,2,3$: $\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_j(\xi,\eta)\,\mathrm{d}(\xi,\eta)$.

3) En déduire l'expression de la matrice de rigidité $\widehat{D}$ dans $\widehat{K}$, avec, pour $i, j = 1,2,3$:

$$\widehat{D}_{i,j} = \int_{\widehat{K}} \nabla\widehat{\varphi}_j(\xi,\eta)\cdot\nabla\widehat{\varphi}_i(\xi,\eta)\,\mathrm{d}(\xi,\eta).$$

À partir de maintenant, nous utilisons la triangulation de la Figure 3, que nous appelerons $\mathscr{T}_h$. Nous notons N_t le nombre de triangles. Pour $p = 1,\dots,N_t$, les sommets du triangle K_p sont renuméroté localement $\mathbf{s}_1^{K_p}$, $\mathbf{s}_2^{K_p}$ et $\mathbf{s}_3^{K_p}$, de sorte que $\mathbf{s}_1^{K_p}$ est situé dans l'angle droit et les sommets sont orientés dans le sens trigonométrique (comme $\widehat{K}$). L'indice p n'est ici en aucun cas une puissance. Par exemple le triangle K_2 a pour sommets (dans l'ordre) en numérotation globale : $\mathbf{s}_5$, $\mathbf{s}_4$, $\mathbf{s}_2$ et en numérotation locale : $\mathbf{s}_1^{K_2}(=\mathbf{s}_5)$, $\mathbf{s}_2^{K_2}(=\mathbf{s}_4)$ et $\mathbf{s}_3^{K_2}(=\mathbf{s}_2)$.

Nous notons de plus, pour $p = 1,\dots,N_t$, et $i = 1,2,3$ les fonctions $\varphi_i^{K_p} = \Phi_I|_{K_p}$ avec $\mathbf{s}_i^{K_p} = \mathbf{s}_I$. Autrement dit, la quantité I est l'indice globale associé à l'indice local i dans K_p. Les fonctions $\varphi_i^{K_p}$ appartiennent donc à $\mathbb{P}^1(K_p)$ et sont telles que $\varphi_i^{K_p}(\mathbf{s}_j^{K_p}) = \delta i, j$, pour $i, j = 1,2,3$.

Question 8 : Pour un triangle K_p, nous rappelons l'expression de T^{K_p}, la transformée linéaire qui permet de passer de $\widehat{K}$ à K_p :

$$\begin{array}{rccl} T^{K_p}: & \widehat{K} & \to & K_p \\ & (\xi,\eta) & \mapsto & (x,y) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{s}_i^{K_p}\widehat{\varphi}_i(\xi,\eta). \end{array}$$

1) Donnez l'expression de la matrice Jacobienne J^{K_p} de T^{K_p} en fonction des coordonnées des sommets $\mathbf{s}_i^{K_p} = (x_i^{K_p}, y_i^{K_p})$. *Rappel :* $(J^{K_p})_{1,1} = \partial x/\partial\xi$, $\quad (J^{K_p})_{1,2} = \partial x/\partial\eta, \dots$

2) En séparant les triangles d'indice paire K_{2q} et ceux d'indice impaire K_{2q+1}, calculez le déterminant de J^{K_p}.

Question 9 : En notant $B_K = (J_K)^{-1}$ et en rappelant que $\nabla\varphi_j^{K_p} = B_K\nabla\widehat{\varphi}_j$, calculez la matrice 3×3 de rigidité local $D^{K_p} = (D_{i,j}^{K_p})_{1\le i,j\le 3}$ définie par, pour $p = 1,\dots,N_t$,

$$\forall i,j = 1,2,3, \qquad D_{i,j}^{K_p} = \int_{K_p} \nabla\varphi_j^{K_p}(x,y)\cdot\nabla\varphi_i^{K_p}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

Question 10 : Nous avons vu en cours que le problème (3) peut se réécrire sous la forme d'un système linéaire $AU = b$. Rappelez l'expression des coefficients de la matrice A et des vecteur U et b.

Question 11 : Supposons que $f = 2$ et $g = 0$ (fonctions constantes). Donnez l'expression explicite (numérique) de chaque coefficient de b avant traitement de la condition de Dirichlet.

Question 12 : Donnez l'expression explicite (numérique) de chaque coefficient de A, avant traitement de la condition de Dirichlet.

Question 13 : Intégrez la condition de Dirichlet dans le système linéaire que vous avez obtenu.

Exercice 3 – Quadrature

Soit K un triangle non plat de sommet $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ et $\mathbf{s}_3$. Montrez que les formules de quadrature

$$\int_K \psi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \simeq \mathrm{Aire}(K)\psi(\mathbf{s}_0),$$

avec $\mathbf{s}_0 = (1/3)\sum_{i=1}^{3} \mathbf{s}_i$ le barycentre du triangle, et

$$\int_K \psi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \simeq \frac{\mathrm{Aire}(K)}{3}\sum_{i=1}^{3}\psi(\mathbf{s}_i),$$

sont exactes pour $\psi \in \mathbb{P}^1(K)$.