Examen 2 – correction

Exercice 1 – Du cours

Question 1 :

$$\forall u,v\in L^2(\Omega),\quad (u,v)_{L^2(\Omega)}=\int_\Omega u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x},\quad \|u\|_{L^2(\Omega)}=\left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right).$$

$$\forall u,v\in H^1(\Omega),\quad (u,v)_{H^1(\Omega)}=\int_\Omega u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}=\left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right).$$

Question 2 : Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $d=2,3$, nous avons alors

$$\exists C>0|\forall u\in H^1_0(\Omega),\quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\geq C\,\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Remarque : Vous êtes nombreux à inverser les quantificateurs !

Question 3 : On peut définir V_h en deux temps. Pour tout ouvert ω de $\mathbb{R}^2$, on définit

$$\mathbb{P}^2(\omega)=\left\{p|_\omega, p\in\mathbb{C}[X]\;\middle|\;\exists a,b,c,d,e,f\in\mathbb{C}\;\middle|\;\forall(x,y)\in\omega, p(x,y)=ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f\right\},$$

et puis

$$V_h^2=\left\{u\in\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})\;\middle|\;\forall K\in\mathscr{T}_h, u|_K\in\mathbb{P}^2(K)\right\}.$$

La dimension de V_h^2 est égale au nombre de sommets additionnée du nombre d'arrêtes de $\mathscr{T}_h$.

Exercice 2 – Formulation faible

Question 1 : Sans nous préoccuper de la régularité, nous multiplions l'EDP par une fonction test v qui est nulle sur Γ_D, comme u. Nous intégrons ensuite sur Ω et nous obtenons :

$$\begin{array}{ll}
\int_\Omega -\Delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_\Omega f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\partial\Omega}\partial_\mathbf{n}u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_\Omega f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & \text{Formule de Green}\\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\Gamma_D}\partial_\mathbf{n}u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\Gamma_N}\partial_\mathbf{n}u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_\Omega f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & \partial\Omega=\Gamma_D\cup\Gamma_N\\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}-\int_{\Gamma_N}\partial_\mathbf{n}u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_\Omega f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & (v)|_{\Gamma_D}=0 \text{ et } (\partial_\mathbf{n}u)|_{\Gamma_N}=g\\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}=\int_\Omega f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}+\int_{\Gamma_N}g(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & \text{Regroupement des termes}
\end{array}$$

Travailler dans $H^1(\Omega)$ est suffisant en terme de régularité, mais nous devons incorporer la condition de Dirichlet. Nous introduisons donc l'espace suivant (attention, notation non standard !)

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega)=\left\{u\in H^1(\Omega)\;\middle|\;\gamma_D u=0\right\},$$

où la fonction $\gamma_D : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_D)$ est l'application trace sur Γ_D. Nous avons vu dans le cours que cette application existe et est continue. Au final, nous obtenons les formes a et ℓ, pour tout $u, v \in V = H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \eta \int_\Omega u(x) \nabla v(x)\,\mathrm{d}x, \quad \ell(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} g(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

La norme dans $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ est la même que dans $H^1(\Omega)$, vu dans le premier exercice.

Question 2 : Tout d'abord $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Ensuite, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont clairement respectivement bilinéaire et linéaire (nous travaillons dans $\mathbb{R}$ donc la bilinéarité inmplique sesquilinéairité et la linéarité, l'anti linéarité). Il nous faut démontrer leur continuité et la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$. Nous noterons C la constante de continuité de l'opérateur trace γ_D :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Gamma_N)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'autre part, nous noterons C_p la constante de l'inégalité de Poincaré :

$$\forall v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \quad \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \geq C_p \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Nous rappelons enfin l'inégalité suivante

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \implies \left\{ \begin{array}{lcl} \|v\|_{H^1(\Omega)} & \geq & \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|v\|_{H^1(\Omega)} & \geq & \|v\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right.$$

Pour tout $u, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
|\ell(v)| &= \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} g(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\Gamma_N} g(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| && \text{Inégalité triangulaire} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{L^2(\Gamma_N)} && \text{Cauchy Schwarz} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} && \text{car } \int_{\partial\Omega} |v(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq \int_{\Gamma_N} |v(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Continuité de la trace} \\
&\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Donc } \ell \text{ est continue sur } H^1_{\Gamma_D}(\Omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3} && \text{Cauchy Schwarz} \\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Inégalité des normes } L^2(\Omega) \text{ et } H^1(\Omega) \\
& && \text{Donc } a \text{ est continue sur } H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\geq C_p \|u\|^2_{H^1(\Omega)} && \text{Inégalité de Poincaré} \\
& && \text{Donc } a \text{ est coercive sur } H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)
\end{aligned}$$

Toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont vérifiées : le problème admet une unique solution.

Question 3 : On définit l'espace des polynômes de degré 1 sur un domaine ω de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\mathbb{P}^1(\omega) = \left\{v \in \mathscr{C}^0(\omega) \text{ tel que } \exists a, b, c \in \mathbb{C}^3, \forall (x,y) \in \omega, v(x,y) = ax + by + c\right\}$$

et puis l'espace V_h (Attention, ne pas oublier la continuité sur $\overline{\Omega}$!)

$$V_h = \left\{u \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \forall K \in \mathscr{T}_h, u|_K \in \mathbb{P}^1(K)\right\}$$

Question 4 : Nous savons que $\dim(V_h) = N_s$ où N_s est le nombre de sommets du maillage. La famille $(\Phi_J)_{1\leq J \leq N_s}$ est de cardinal N_s, il nous suffit dont de montrer qu'elle est libre pour qu'elle forme une base de V_h. Soient N_s scalaires α_J, pour $j = 1, \ldots, N_s$:

$$\begin{aligned}\sum_{J=1}^{N_s} \alpha_J \Phi_J = 0 &\iff \forall (x,y) \in \Omega, \quad \sum_{J=1}^{N_s} \alpha_J \Phi_J(x,y) = 0\\ &\iff \forall I = 1, \ldots, N_s, \quad \sum_{J=1}^{N_s} \alpha_J \Phi_J(\mathbf{s}_I) = 0\\ &\iff \forall I = 1, \ldots, N_s, \quad \alpha_I = 0.\end{aligned}$$

Autrement dit, la famille est libre et forme donc une base.

Remarque : À peu près tout le monde a voulu montrer la liberté de la famille mais on sauté une étape (cruciale) et on commencé en partant de la deuxième ligne de l'équation ci-dessus...

Question 5 : $V_h \subset H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert (cours). V_h dispose de la même norme que $H^1(\Omega)$ et de plus comme $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont continues sur respectivement $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, elles le sont toujours sur respectivement $V_h \times V_h$ et V_h. La coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ étant valable pour tout élément de $H^1(\Omega)$, elle le reste pour les éléments de V_h. Autrement dit, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ vérifient toujours les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sur V_h : le problème admet donc une unique solution.

Question 6 : 1) Les trois triangulations sont acceptables

2) Plus certaines triangles sont plats, plus un maillage est de mauvaise qualité. En conséquence, le maillage $\mathscr{T}_{h,1}$ est meilleur que les deux autres. On peut supposer que $\mathscr{T}_{h,2}$ sera meilleur que $\mathscr{T}_{h,3}$.

Question 7 : 1) Nous avons

$$\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) = \xi, \quad \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) = \eta,$$

$$\nabla\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla\widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla\widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Commençons par $\widehat{\varphi}_2$:

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta)\mathrm{d}(\xi,\eta) &= \int_{\xi=0}^{\xi=1}\int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=1}\int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\\ &= \int_{\xi=0}^{\xi=1} \xi(1-\xi)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi = \left[\xi^2/2 - \xi^3/3\right]_{\xi=0}^{\xi=1} = 1/2 - 1/3 = 1/6.\end{aligned}$$

Et puis $\widehat{\varphi}_3$, même si c'est la même chose :

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta)\mathrm{d}(\xi,\eta) &= \int_{\xi=0}^{\xi=1}\int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta)\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=1}\int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \eta\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\\ &= \frac{1}{2}\int_{\xi=0}^{\xi=1}(1-\xi)^2\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi = 1/2\left[\xi-\xi^2+\xi^3/3\right]_{\xi=0}^{\xi=1} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = 1/6\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_1(\xi,\eta)\mathrm{d}(\xi,\eta) = \int_{\widehat{K}} 1\mathrm{d}(\xi,\eta) - \int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta)\mathrm{d}(\xi,\eta) - \int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta)\mathrm{d}(\xi,\eta) = 1/2-1/6-1/6 = 1/6,$$

car $\int_{\widehat{K}} 1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = 1/2$ (aire du triangle).

3) La matrice est clairement symétrique, nous ne calculons donc pas tous les termes :

$$\begin{aligned}\widehat{D}_{1,1} &= \int_{\widehat{K}} \nabla\widehat{\varphi}_1\cdot\nabla\widehat{\varphi}_1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = 2\int_{\widehat{K}} 1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = 1,\\ \widehat{D}_{1,2} &= \int_{\widehat{K}} \nabla\widehat{\varphi}_2\cdot\nabla\widehat{\varphi}_1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = -\int_{\widehat{K}} 1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = -1/2,\\ \widehat{D}_{1,3} &= \int_{\widehat{K}} \nabla\widehat{\varphi}_3\cdot\nabla\widehat{\varphi}_1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = -\int_{\widehat{K}} 1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = -1/2,\\ \widehat{D}_{2,2} &= \int_{\widehat{K}} \nabla\widehat{\varphi}_2\cdot\nabla\widehat{\varphi}_2\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = \int_{\widehat{K}} 1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = 1/2,\\ \widehat{D}_{2,3} &= \int_{\widehat{K}} \nabla\widehat{\varphi}_2\cdot\nabla\widehat{\varphi}_2\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = 0\times\int_{\widehat{K}} 1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = 0,\\ \widehat{D}_{3,3} &= \int_{\widehat{K}} \nabla\widehat{\varphi}_3\cdot\nabla\widehat{\varphi}_3\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = \int_{\widehat{K}} 1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) = 1/2.\end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\widehat{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2\\ -1/2 & 1/2 & 0\\ -1/2 & 0 & 1/2\end{pmatrix}.$$

Question 8 : 1) Nous avons

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& x_1^{K_p}\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) + x_2^{K_p}\widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) + x_3^{K_p}\widehat{\varphi}_3(\xi,\eta)\\ y &=& y_1^{K_p}\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) + y_2^{K_p}\widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) + y_3^{K_p}\widehat{\varphi}_3(\xi,\eta)\end{array}\right.$$

En remplaçant les $\widehat{\varphi}_i(\xi,\eta)$ par leur valeur, nous obtenons facilement la matrice Jacobienne :

$$J^{K_p} = \begin{pmatrix} x_2^{K_p}-x_1^{K_p} & x_3^{K_p}-x_1^{K_p}\\ y_2^{K_p}-y_1^{K_p} & y_3^{K_p}-y_1^{K_p}\end{pmatrix}.$$

2) Nous avons, du fait de l'orientation des sommets :

$$J^{K_{2q}} = \begin{pmatrix} -h & 0\\ 0 & -h\end{pmatrix} = -hI \qquad J^{K_{2q+1}} = \begin{pmatrix} h & 0\\ 0 & h\end{pmatrix} = hI,$$

où I est la matrice 2×2 identité. Dans tous les cas, nous obtenons

$$\det(J^{K_p}) = h^2.$$

Question 9 : Nous avons $(B^{K_p})^T B^{K_p} = (1/h^2)I$, et il vient alors, pour $i,j = 1,2,3$:

$$
\begin{aligned}
D^{K_p}_{i,j} = \int_{K_p} \nabla\varphi_j^{K_p}(x,y)\cdot\nabla\varphi_i^{K_p}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{K_p} (\nabla\varphi_j^{K_p}(x,y))^T(\nabla\varphi_i^{K_p}(x,y))\,\mathrm{d}(x,y)\\
&= \int_{K_p} (\nabla\varphi_j^{K_p}(x,y))^T(\nabla\varphi_i^{K_p}(x,y))\,\mathrm{d}(x,y)\\
&= \left|\det(J^{K_p})\right| \int_{\widehat{K}} (B^{K_p}\nabla\widehat{\varphi}_j(\xi,\eta))^T(B^{K_p}\nabla\widehat{\varphi}_i(\xi,\eta))\,\mathrm{d}(\xi,\eta)\\
&= \left|\det(J^{K_p})\right| \int_{\widehat{K}} (\widehat{\varphi}_j(\xi,\eta))^T(\nabla\widehat{\varphi}_i(\xi,\eta))\,\mathrm{d}(\xi,\eta)\\
&= h^2\frac{1}{h^2}\int_{\widehat{K}} (\widehat{\varphi}_j(\xi,\eta))^T(\nabla\widehat{\varphi}_i(\xi,\eta))\,\mathrm{d}(\xi,\eta)\\
&= \widehat{D}_{i,j}
\end{aligned}
$$

Question 10 : Comme $(\Phi_J)_J$ est une base de V_h, nous avons :

$$\exists u_1, u_2, \ldots, u_{N_S} \in \mathbb{C} | u_h = \sum_{J=1}^{N_s} u_J \Phi_J,$$

si u_h est la solution de la formulation faible dans V_h. De plus nous savons que $u_J = u_h(\mathbf{s}_J)$ pour tout J. D'autre part, la formulation faible en V_h nous donne :

$$\forall v_h \in V_h, \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h).$$

Celle-ci se réécrit de manière équivalente :

$$\forall I = 1,\ldots,N_s, \qquad a(u_h, \Phi_I) = \ell(\Phi_I).$$

Nous injectons l'expression de u_h dedans pour obtenir :

$$\forall I = 1,\ldots,N_s, \qquad \sum_{J=1}^{N_S} a(\Phi_J,\Phi_I)u_h(\mathbf{s}_J) = \ell(\Phi_I) \iff AU = b,$$

avec $A = (A_{I,J})_{1\leq I,J\leq N_s}$, $U = (u_h(\mathbf{s}_J))_{1\leq J\leq N_s}$, et $b = (b_I)_{1\leq I\leq N_s}$, et

$$\forall J, I = 1,\ldots,N_s, \qquad A_{I,J} = a(\Phi_J,\Phi_I), \qquad u_I = u_h(\mathbf{s}_I), \qquad b_I = \ell(\Phi_I).$$

Question 11 : Si $f = 2$ et $g = 0$ alors

$$b_I = 2\int_\Omega \Phi_I(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 2\sum_{p=1}^{N_t}\int_{K_p}\Phi_I(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

À I fixé, les termes de la somme sont nuls si $\mathbf{s}_I$ n'est pas un sommet du triangle K_p. Par ailleurs, la Question 7,2) a montré que, peu importe le sommet du triangle, l'intégrale $\int_{\widehat{K}}\widehat{\varphi}_i = 1/6$ (pour $i = 1,2,3$), nous avons donc, par changement de variable dans le triangle de référence :

$$\forall p = 1,\ldots,N_t, \qquad \int_{K_p}\Phi_I(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{\left|\det(J^{K_p})\right|}{6} = h^2/6.$$

Nous obtenons donc :

$$b_I = 2 \sum_{K_p \in \mathscr{T}_h \text{ tel que } \mathbf{s}_I \text{ est un sommet de } K_p} \int_{K_p} \Phi_I(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 2\frac{h^2}{6}N_I = \frac{h^2}{3}N_I,$$

où N_I est le nombre de triangles ayant $\mathbf{s}_I$ comme sommet. Nous faisons les comptes et obtenons

$$b = \frac{h^2}{3}\begin{pmatrix} 1\\3\\2\\3\\6\\3\\2\\3\\1 \end{pmatrix}$$

Question 12 : La matrice A est de taille 9×9, et elle est symétrique car $a(\cdot,\cdot)$ l'est. Nous pouvons nous contenter de calculer les coefficients de sa partie triangulaire supérieure uniquement (et c'est ce que nous faisons). Rappelons l'expression de $A_{I,J}$:

$$A_{I,J} = \int_\Omega \nabla\Phi_J(\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_I(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \sum_{K_p\in\mathscr{T}_h}\int_{K_p}\nabla\Phi_J(\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_I(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Les termes de cette somme sont nul si $\mathbf{s}_J$ et $\mathbf{s}_I$ ne partagent aucun triangle en commun. Cela permet déjà d'éliminer certains coefficient de la matrice A.

Par ailleurs, nous avons calculé la matrice de rigidité dans le cas d'un triangle quelconque en numérotation locale. Nous pouvons établir que, si $\mathbf{s}_I$ et $\mathbf{s}_J$ sont des sommets distincts de K_p :

$$\int_{K_p} |\nabla\Phi_I\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{cases} D_{1,1} = 1 & \text{si } \mathbf{s}_I \text{ est dans l'angle droit,}\\ D_{2,2} = D_{3,3} = 1/2 & \text{sinon,}\end{cases}$$

$$\int_{K_p}\nabla\Phi_J(\mathbf{x})\cdot\nabla\Phi_I(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{cases} D_{1,2} = D_{1,3} = -1/2 & \text{si } \mathbf{s}_I \text{ ou } \mathbf{s}_J \text{ est dans l'angle droit,}\\ D_{2,3} = 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Après cela, nous n'avons plus qu'à faire les comptes :

$A_{1,1} = 1,$	$A_{1,2} = -1/2,$	$A_{1,4} = -1/2$	
$A_{2,2} = 1 + 1/2 + 1/2 = 2,$	$A_{2,3} = -1/2,$	$A_{2,4} = 0 + 0$	$A_{2,5} = -1/2 - 1/2 = -1$
$A_{3,3} = 1/2 + 1/2 = 1$	$A_{3,5} = 0 + 0 = 0$	$A_{3,6} = -1/2$	
$A_{4,4} = 1/2 + 1/2 + 1 = 2$	$A_{4,5} = -1/2 - 1/2 = -1$	$A_{4,7} = -1/2$	
$A_{5,5} = 1/2 + 1/2 + 1 + 1/2 + 1/2 + 1 = 4$	$A_{5,6} = -1/2 - 1/2 = -1$	$A_{5,7} = 0 + 0 = 0$	$A_{5,8} = -1/2 - 1/2 = -1$
$A_{6,6} = 1/2 + 1/2 + 1 = 2$	$A_{6,8} = 0 + 0 = 0$	$A_{6,9} = -1/2$	
$A_{7,7} = 1/2 + 1/2 = 1$	$A_{7,8} = -1/2$		
$A_{8,8} = 1 + 1/2 + 1/2 = 2$	$A_{8,9} = -1/2$		
$A_{9,9} = 1$			

Au final, nous obtenons :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 2 & -1/2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Question 13 : Les sommets qui sont soumis à une condition de Dirichlet sont les sommets $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_4$ et $\mathbf{s}_7$. Nous rendons les lignes et les colonnes associées à ces sommets égales à 0 avec 1 sur la diagonale. Le membre de droite est lui aussi mis à 0 sur les lignes $1, 4$ et 7 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1/2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ u_9 \end{pmatrix} = \frac{h^2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons renumérotter la matrice pour séparer les sommets sur le bord de Dirichlet des autres, et ainsi obtenir une forme plus commode à la lecture, en pivotant les lignes et colonnes :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1/2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 & 2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_1 \\ u_4 \\ u7 \end{pmatrix} = \frac{h^2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 – Quadrature

Par la linéarité de ψ et la définition du barycentre $\mathbf{s}_0$, nous remarquons que les deux règles de quadratudes sont équivalentes :

$$\text{Aire}(K)\psi(\mathbf{s}_0) = \text{Aire}(K)\psi\left(\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\mathbf{s}_i\right) = \frac{\text{Aire}(K)}{3}\sum_{i=1}^{3}\psi(\mathbf{s}_i).$$

Autrement dit, il suffit de montrer que l'une des deux seulement est exactes pour démontrer la propriété pour les deux. Occupons nous de la deuxième formule. Nous savons que si $\psi \in \mathbb{P}^1(K)$

alors il existe trois coefficients $\psi(\mathbf{s}_i)$, pour $i = 1, 2, 3$ telle que

$$\forall (x, y) \in K, \qquad \psi(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \psi(\mathbf{s}_i)\varphi_i(x, y),$$

où les fonctions φ_i sont les fonctions de forme de $\mathbb{P}^1(K)$, c'est à dire telle que $\varphi_i(\mathbf{s}_j) = \delta_{i,j}$. Nous avons alors

$$\int_K \psi(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \int_K \sum_{i=1}^{3} \psi(\mathbf{s}_i)\varphi_i(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \sum_{i=1}^{3} \psi(\mathbf{s}_i) \int_K \varphi_i(x, y)\,\mathrm{d}(x, y).$$

Il nous reste à calculer $\int_K \varphi_i(x, y)\,\mathrm{d}(x, y)$ pour chaque i. Pour cela nous pouvons nous aider de l'Exercice 2 :

$$\int_K \varphi_i(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \det(J^K) \int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_i(\xi, \eta)\,\mathrm{d}(\xi, \eta) = \det(J^K)/6.$$

On sait ou on peut redémontrer que $\det(J^K) = 2\mathrm{Aire}(K)$ pour obtenir

$$\forall i = 1, 2, 3, \qquad \int_K \varphi_i(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \frac{\mathrm{Aire}(K)}{3}.$$

Au final nous obtenons bien

$$\int_K \psi(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) = \frac{\mathrm{Aire}(K)}{3} \sum_{i=1}^{3} \psi(\mathbf{s}_i).$$