Examen 1

Les objets électroniques (calculette, tablette, smartphone, etc.) doivent être rangés éteints dans les sacs durant l'épreuve. Tout objet de ce type allumé pendant l'épreuve sera saisi. Les documents papiers autres que les copies et le brouillon ne sont pas admis. L'usage de la couleur rouge est proscrit également. Tout résultat sera justifié avec soin et détail.

4 exercices à résoudre en 2h

Exercice 1 – Du cours

Question 1 : Énoncez le Théorème de Lax-Milgram et détaillez chaque hypothèse (*Qu'est-ce qu'elles signifient mathématiquement*).

Question 2 : Donnez la définition mathématique de la dérivée faible.

Question 3 : Énoncez la Formule de Green pour un ouvert Ω de classe $\mathscr{C}^1$ et $u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$.

Question 4 : Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^3$, borné et régulier de classe $\mathscr{C}^1$, de normal unitaire sortante $\mathbf{n}$, $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$, et $v \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$. Redémontrez la formule suivante

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\, v(x)\,\mathrm{d}s,$$

où $\Delta u = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq 3}$ est le vecteur gradient de u, et $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u\cdot\mathbf{n} = \partial_{\mathbf{n}} u$.

Exercice 2 – De l'énergie

Nous supposons ici que nous disposons de la formulation faible suivante, où toutes les **valeurs sont réelles** :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v), \end{array}\right. \tag{1}$$

avec $a(\cdot,\cdot) : V\times V \to \mathbb{R}$ et $\ell(\cdot) : V \to \mathbb{R}$. Soit $J : V \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par :

$$\forall v \in V, \qquad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \ell(v).$$

Nous nous plaçons sous les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram et sous l'hypothèse que $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique : $a(v,w) = a(w,v)$.

Question 1 : Montrez que si u est la solution de (1) alors u minimise la fonctionnelle J, c'est à dire que

$$J(u) = \min_{v\in V} J(v).$$

Aucune idée pour démarrer ? À v fixé, introduisez $w = u + v$ et regardez $J(u+w)$.

Question 2 : Montrez la réciproque, c'est-à-dire : si u minimise J alors u est solution de (1). *Pour un $v \in V$ arbitraire, introduisez la fonction $j(t) = J(u+tv)$.*

Exercice 3 – Démonstration du Théorème de Lax-Milgram

Vous pouvez le démontrer vous-même (#LikeABoss), auquel cas ce n'est pas la peine de résoudre les questions ci-dessous. Autrement, résolvez les questions suivantes. Nous considérons la formulation faible suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que}\\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v),\end{array}\right.$$

Question 1 : Si vous êtes ici, c'est que vous ne souhaitez pas démontrer le Théorème de Lax-Milgram vous-même. Pas de soucis. Plaçons nous sous les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram. Nous noterons $(\cdot,\cdot)_V$ le produit scalaire sur V et $\|\cdot\|_V$ la norme induite. Montrez que :

1. Il existe $b \in V$ tel que, pour tout v de V : $\ell(v) = (b,v)_V$
2. Il existe une application linéaire continue $A : V \to V$ telle que pour tout w et v de V : $a(w,v) = (Aw,v)_V$.

Question 2 : Notons $\rho > 0$ une constante et l'application $S_\rho : V \to V$ définie par

$$\forall v \in V, \qquad S_\rho(v) = v - \rho(Av - b).$$

Montrez que, pour tout $v, w \in V$:

$$\left\|S_\rho(v) - S_\rho(w)\right\|_V^2 \leq (1 - 2\rho\alpha + M\rho^2)\,\|v - w\|_V^2$$

où M est la constante de continuité de A (ou $a(\cdot,\cdot)$) et α de coercivité de $a(\cdot,\cdot)$.

N'oubliez pas que $\|v\|_V^2 = (v,v)_V$

Question 3 : Démontrez que, pour une valeur de ρ bien choisie, S_ρ est contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in]0,1[$ tel que, pour tout v, w de V, nous ayons $S(v)S(w) \leq k\|v - w\|_V$

Question 4 : Concluez alors la démonstration du Théorème de Lax Milgram grâce au Théorème du Point Fixe :

Théorème 1 (du Point Fixe)**.** *Soit V un espace de Hilbert et soit $S : V \to V$ une application contractante, alors il existe un unique $u \in V$ tel que $S(u) = u$.*

Exercice 4 – Formulation faible

Dans cet exercice, on considère le domaine Ω décrit par la figure 1 et la quantité $\eta > 1$. On considère le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + \eta u &=& f & (\Omega),\\ \partial_{\mathbf{n}} u &=& 0 & (\Gamma),\end{array}\right. \tag{2}$$

Nous supposons dans cet exercice que les fonctions u et f sont à valeurs réelles.

Question 1 : En précisant explicitement l'espace fonctionnel V et sa norme $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$, donnez la formulation variationnelle du problème (2) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que}\\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v).\end{array}\right. \tag{3}$$

Question 2 : Démontrez que le problème (3) admet une unique solution.

Question 3 : Écrivez un code en language GMSH qui permettrait d'obtenir la géométrie désirée (c'est-à-dire Ω). Nous précisons et rappelons que :

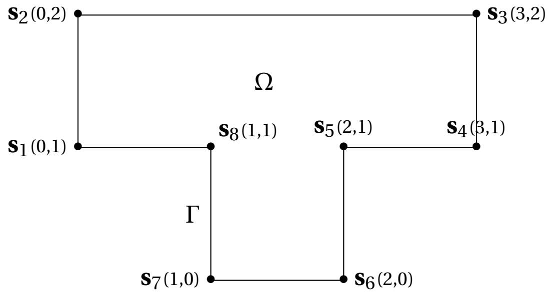


FIG. 1 : Domaine Ω de l'Exercice

- *Pour séparer Γ_0 et Γ_1 dans le fichier de maillage, il faut pour cela définir deux `Physical Line`. Rassurez-vous : la note de l'examen ne prend pas en compte la présence ou l'absence de `Physical` dans votre code*
- *Nous rappelons quelques syntaxes propre à GMSH :*
  - `Point(i)= {x, y, z, h};`
  - `Line(i)= {point1, point2};`
  - `Line Loop(i)= {line1, line2, ..., lineN};`
  - `Plane Surface(i)= {lineloop1, lineloop2, ..., lineloopN};`

Question 4 : On souhaite résoudre le problème (3) à l'aide d'une méthode éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. Rappelez la définition de l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange basé sur une triangulation $\mathscr{T}_h$ (non encore précisée). Cet espace sera noté V_h.

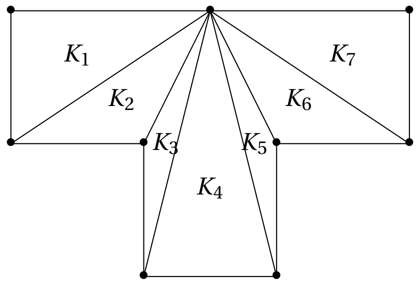
Question 5 : Démontrez que le problème ci-dessous admet une unique solution

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que}\\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h).\end{array}\right.$$

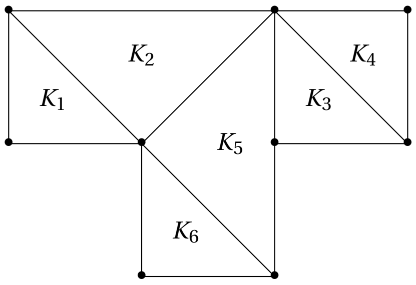
Question 6 : Deux triangulations nous sont présentées sur la Figure 2. Avec justification, dites pour chacune d'elle si elle est, oui ou non, acceptable pour la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$. De plus, dessiner sur votre feuille une triangulation admissible, qui ne soit pas déjà décrite dans le sujet du partiel.

Question 7 : À partir de maintenant, nous utilisons la triangulation de la Figure 3, que nous appelerons $\mathscr{T}_h$. Quelle est alors la dimension de V_h ?

Question 8 : Nous notons φ_j les fonctions de V_h telles que $\varphi_j(\mathbf{s}_j) = 1$ et $\varphi_j(\mathbf{s}_i) = 0$ si $i \neq j$. Calculez l'expression explicite des 10 fonctions φ_j, $j = 1, \dots, 10$, sur le triangle K_2.



(a) $T_{h,1}$



(b) $T_{h,2}$

FIG. 2 : Triangulations de Ω

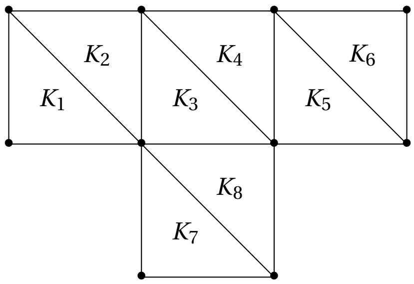


FIG. 3 : Triangulation $\mathscr{T}_h$