Examen 1 – correction

Exercice 1 – Du cours

Question 1 : Soit V un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$ et d'une norme $\|\cdot\|_V$. Soit la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que}\\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v).\end{array}\right.$$

Sous les hypothèses suivantes, la formulation variationnelle admet une unique solution :

- a est une forme sesquilinéaire sur $V \times V$ et ℓ une forme anti linéaire sur V
- a est continue : $\exists M > 0$ tel que $\forall u, v \in V, |a(u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$
- ℓ est continue : $\exists C > 0$ tel que $\forall v \in V, |\ell(v)| \leq C \|v\|_V$
- a est coercive : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u \in V, \Re(a(u,u)) \geq \alpha \|u\|_V^2$

Question 2 : Soit $u \in L^2(\Omega)$, alors u admet une dérivée faible dans la direction x_i s'il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega u(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_\Omega g(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Question 3 : Soit $u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, alors pour $i = 1, 2, \dots, d$ (où d est la dimension du problème) :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x})\mathbf{n}_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante à Ω.

Question 4 : Nous prenons $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
&= \sum_{j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \text{Somme et intégrale finies} \\
&= \sum_{j=1}^d \left[-\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathbf{n}_i(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \right] && \text{Formule de Green} \\
&= -\int_\Omega \sum_{j=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^d \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathbf{n}_j(\mathbf{x}) \right) v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \text{Sommes et intégrales finies} \\
&= -\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} (\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}))\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \text{Définition gradient} \\
&= -\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \text{Définition dérivée normale}
\end{aligned}$$

Exercice 2 – De l'énergie

Question 1 : Nous avons :

$$\begin{aligned}
J(v) = J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w,u+w) - \ell(u+w)\\
&= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}a(u,w) + \frac{1}{2}a(w,u) + \frac{1}{2}a(w,w) - \ell(u) - \ell(w)\\
&= \frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u) + \frac{1}{2}a(w,w) - \ell(w) + \frac{1}{2}\left(a(u,w) + a(w,u)\right)\\
&= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) - \ell(w) + \frac{1}{2}\left(a(u,w) + a(u,w)\right)\\
&= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) - \ell(w) + a(u,w)\\
&= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w)\\
&\geq J(u)
\end{aligned}$$

Question 2 : Soient $v \in V$ et $j(t) = J(u+tv)$, comme u minimise J, nous avons :

$$j(t) = J(u+tv) = J(u) + \frac{t^2}{2}a(v,v) + t\left[a(u,v) - \ell(v)\right].$$

Comme $t = 0$ est un minimum de j, on en déduit que $j'(t=0) = 0$, d'où, comme v est arbitraire

$$\forall v \in V, \qquad a(u,v) - \ell(v) = 0.$$

Exercice 3 – Démonstration du Théorème de Lax-Milgram

Question 1 : Nous rappelons que ℓ est continue et anti-symétrique tandis que $a(\cdot\,,\cdot)$ est continue et sesquilinéaire. Nous sommes sous les hypothèses du Théorème de Représentation de Risz :

1. $\exists b \in V \,/\, \forall v \in V\,, \qquad \ell(v) = (b,v)_V$
2. Pour w arbitraire, la fonction $v \to a(w\,,u)$ est continue et anti-linéaire. Nous avons donc

   $$\exists (Aw) \in V \,/\, \forall v \in V, \qquad a(w,v) = (Aw,v)_V$$

   Il reste à montrer que $A : V \to V$ est continue et linéaire :

   $$\forall v \in V, \qquad a(w+w',v) = \left(A(w+w'),v\right)_V = a(w,v) + a(w',v) = (Aw,v)_V + \left(Aw',v\right)_V$$

   Pour la continuité (si M est la constante de continuité de $a(\cdot\,,\cdot)$) :

   $$\|Aw\|_V^2 = (Aw,Aw)_V = a(w,Aw) \leq M\,\|w\|_V\,\|Aw\|_V$$

   Ce qui implique que $\|Aw\|_V \leq M\,\|w\|_V$.

Question 2 : Pour tout $v\,,w \in V$,

$$\begin{aligned}
\left\| S_\rho(v) - S_\rho(w)\right\|_V^2 &= \left(S_\rho(v) - S_\rho(w), S_\rho(v) - S_\rho(w)\right)_V \\
&= \left(v - \rho(Av-b) - w + \rho(Aw-b), v - \rho(Av-b) - w + \rho(Aw-b)\right)_V \\
&= \left((v-w) - \rho(Av-Aw), (v-w) - \rho(Av-Aw)\right)_V \\
&= (v-w, v-w)_V + \left(\rho(Av-Aw), \rho(Av-Aw)\right)_V - \left(\rho(Av-Aw), (v-w)\right)_V - \left((v-w), \rho(Av-Aw)\right)_V \\
&= \|v-w\|_V^2 + \rho^2\,\|A(v-w)\|_V^2 - \left(\rho(Av-Aw), (v-w)\right)_V - \overline{\left(\rho(Av-Aw), (v-w)\right)_V} \\
&= \|v-w\|_V^2 + \rho^2\,\|A(v-w)\|_V^2 - 2\rho\Re\left(((A(v-w), (v-w))_V\right) \\
&= \|v-w\|_V^2 + \rho^2\,\|A(v-w)\|_V^2 - 2\rho\Re\left(a((v-w), v-w)\right)
\end{aligned}$$

Nous utilisons maintenant la continuité de A (notée M) et la coercivité de $a(\cdot\,,\cdot)$ (notée α) :

$$\left\| S_\rho(v) - S_\rho(w)\right\|_V^2 \leq \|v-w\|_V^2 + M\rho^2\,\|v-w\|_V^2 - 2\rho\alpha\,\|v-w\|_V^2 = \left(1 - 2\rho\alpha + M\rho^2\right)\|v-w\|_V^2$$

Question 3 : Prenons ρ minimisant $1-2\rho\alpha+M\rho^2$: $\rho = \alpha/M$. Cela implique que

$$\left\| S_\rho(v) - S_\rho(w)\right\|_V^2 \leq \left(1 - \frac{\alpha^2}{M}\right)\|v-w\|_V^2$$

Et la fonction S_ρ est bien contractante.

Question 4 : Il existe un unique u tel que $S_\rho(u) = u$ et donc tel que $Au = b$ (car $\rho \neq 0$). Or, nous avons que

$$Au = b \iff \forall v \in v, (Au, v)_V = (b, v)_V \iff \forall v \in v, a(u,v) = \ell(v).$$

Exercice 4 – Formulation faible

Question 1 : $V = H^1(\Omega)$, de norme $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2\,\mathrm{d}x$. Nous multiplions l'EDP par $v \in H^1(\Omega)$, intégrons sur Ω :

$$\begin{array}{ll}
\int_\Omega -\Delta u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \eta\int_\Omega u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \eta\int_\Omega u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega}\partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & \text{Formule de Green} \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \eta\int_\Omega u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & (\partial_{\mathbf{n}} u)|_{\partial\Omega} = 0
\end{array}$$

Au final, nous obtenons les formes a et ℓ, pour tout $u\,, v \in V = H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \eta\int_\Omega u(x)\nabla v(x)\,\mathrm{d}x, \quad \ell(v) = \int_\Omega f(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Question 2 : Tout d'abord $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Ensuite, $a(\cdot\,,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont clairement respectivement bilinéaire et linéaire (nous travaillons dans $\mathbb{R}$ donc la bilinéarité inmplique sesquilinéairité et la linéarité, l'anti linéarité). Il nous faut démontrer leur continuité et la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$. Pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
|\ell(v)| &= \left|\int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} && \text{Cauchy Schwarz}\\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Inégalité des normes}\\
|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \eta\int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left|\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\eta\int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x\right| && \text{Inégalité triangulaire}\\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3} + \eta\|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} && \text{Cauchy Schwarz}\\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \eta\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Inégalité des normes } L^2(\Omega) \text{ et } H^1(\Omega)\\
&\leq (1+\eta)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Donc } a \text{ est continue sur } H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \eta\int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x && \text{Car } \eta > 1 \text{ et chaque terme est positif}\\
&\geq \|u\|^2_{H^1(\Omega)} && \text{Donc } a \text{ est coercive}
\end{aligned}
$$

Toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont vérifiées : le problème admet une unique solution.

Question 3 :

```
h = 0.1;
Point(1) = {0,1,0,h};   Point(2) = {0,2,0,h};
Point(3) = {3,2,0,h};   Point(4) = {3,1,0,h};
Point(5) = {2,1,0,h};   Point(6) = {2,0,0,h};
Point(7) = {1,0,0,h};   Point(6) = {1,1,0,h};
Line(1) = {1,2};  Line(2) = {2,3};
Line(3) = {3,4};  Line(4) = {4,5};
Line(5) = {5,6};  Line(6) = {6,7};
Line(5) = {7,8};  Line(6) = {8,1};
Line Loop(1) = {1:8};
Plane Surface(1) = {1};
Physical Surface(1) = {1};
Physical Line(2) = {1:8}; //partial omega
```

Question 4 : On définit l'espace des polynômes de degré 1 sur un domaine ω par :

$$\mathbb{P}^1(\omega) = \left\{v \in \mathscr{C}^0(\omega) \text{ tel que } \exists a,b,c \in \mathbb{C}^3, \forall (x,y)\in\omega, v(x,y) = ax+by+c\right\}$$

et puis l'espace V_h (Attention, ne pas oublier la continuité sur $\overline{\Omega}$!)

$$V_h = \left\{u \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \forall K \in \mathscr{T}_h, u|_K \in \mathbb{P}^1(K)\right\}$$

Question 5 : $V_h \subset H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert car de dimension finie (voir cours). V_h dispose de la même norme que $H^1(\Omega)$ et de plus comme $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont continues sur respectivement $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, elles le sont toujours sur respectivement $V_h \times V_h$ et V_h. La coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ étant valable pour tout élément de $H^1(\Omega)$, elle le reste pour les éléments de V_h. Autrement dit, $a(\cdot,\cdot)$ et

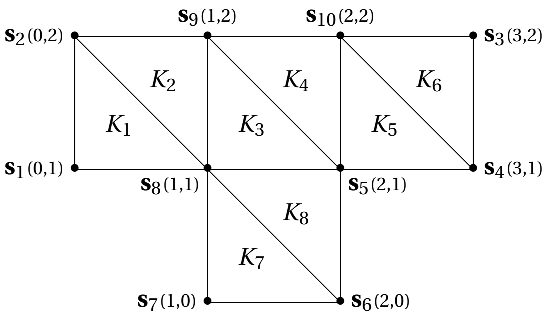

FIG. 1 : Triangulation $\mathscr{T}_h$

$\ell(\cdot)$ vérifient toujours les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sur V_h : le problème admet donc une unique solution.

Question 6 : T_1 est admissible tandis que T_2 ne l'est pas.

Question 7 : La dimension de V_h est égale au nombre nœuds de la triangulation : 10

Question 8 : Nous notons les sommets ainsi :

Les trois sommets du triangle K_2 sont $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_8$ et $\mathbf{s}_9$, autrement dit, seules les fonctions de forme associées à ces noeuds seront non nulles dans K_2. Pour $j \in \{2, 8, 9\}$, notons :

$$\varphi_j|_{K_7}(x,y) = a_j x + b_j y + c,$$

et calculons ces coefficients.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_2(0,2) & = & 1 \\ \varphi_2(1,1) & = & 0 \\ \varphi_2(1,2) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2b_2 + c_2 & = & 1 \\ a_2 + b_2 + c_2 & = & 0 \\ a_2 + 2b_2 + c_2 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_2 & = & -1 \\ b_2 & = & 0 \\ c_2 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_8(0,2) & = & 0 \\ \varphi_8(1,1) & = & 1 \\ \varphi_8(1,2) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2b_8 + c_8 & = & 0 \\ a_8 + b_8 + c_8 & = & 1 \\ a_8 + 2b_8 + c_8 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_8 & = & 0 \\ b_8 & = & -1 \\ c_8 & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_9(0,2) & = & 0 \\ \varphi_9(1,1) & = & 0 \\ \varphi_9(1,2) & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 2b_9 + c_9 & = & 0 \\ a_9 + b_9 + c_9 & = & 0 \\ a_9 + 2b_9 + c_9 & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_9 & = & 1 \\ b_9 & = & 1 \\ c_9 & = & -2 \end{array}\right.$$

Au final, nous obtenons pour tout (x, y) de K_2 :

$$\varphi_2(x,y) = -x + 1, \quad \varphi_8(x,y) = -y + 2, \quad \varphi_9(x,y) = x + y - 2$$