1 Feuille d’exercices : Formulations Faibles

Exercice 1. *Soit Ω un ouvert régulier de classe $\mathscr{C}^1$. On supposera u, v, ϕ, ψ et σ suffisamment dérivables à chaque fois. À l’aide de la formule de Green, montrez les formules suivantes*

1. *La formule du Laplacien*

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\, v(x)\,\mathrm{d}s,$$

   où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\le i\le d}$ est le vecteur gradient de u, et $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u\cdot\mathbf{n}$.

2. *La formule de Stokes :*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \sigma(x)\cdot\nabla\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \sigma(x)\cdot\mathbf{n}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}s.$$

3. *La formule du rotationnel :*

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\phi\cdot\psi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \phi\cdot\mathrm{rot}\psi\,\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega} (\phi\times\mathbf{n})\cdot\psi\,\mathrm{d}s,$$

   où le rotationnel est défini par

$$\mathrm{rot}\phi = \left(\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\right)$$

Exercice 2. *Donnez la formulation variationnelle du système suivant (équation de Helmholtz) dans $H^1(\Omega)$, où $k>0$:*

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u &= f \quad (\Omega) \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= 0 \quad (\Gamma := \partial\Omega) \end{cases}$$

Faites de même en remplaçant la condition aux limites sur $\partial\Omega$ par ($\imath = \sqrt{-1}$) :

$$\partial_{\mathbf{n}} u - \imath k u = 0.$$

Exercice 3. *Soit $\Omega =]1,1[$. Montrez que la fonction valeur absolue $f : x \longmapsto |x|$ est dans $H^1(\Omega)$ et calculez sa dérivée faible, que lon note f'. Est-ce que $f'\in H^1(\Omega)$? Si oui, calculez sa dérivée faible.*

Exercice 4. *Plaçons nous en dimension 1 sur l’intervalle $\Omega =]-1,1[$. Montrez que l’espace $\mathscr{C}^1(\Omega)$...*

- *N’est pas complet pour la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$*
- *Est complet pour la norme $N(f) = \sup_{x\in\Omega}|f(x)| + \sup_{x\in\Omega}|f'(x)|$*

- *N'est pas complet pour la norme* $N_{H^1(\Omega)}(f) = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$

Pour montrer la non complétude de l'espace, nous suggérons d'étudier la suite de fonction $(u_n)_n$ *définit sur* Ω *par*

$$\forall x \in \Omega, \quad u_n(x) = \begin{cases} -x-1, & \text{si } -1 < x < -1/n, \\ (n/2)x^2 - 1 + 1/(2n), & \text{si } -1/n < x < 1/n, \\ x-1, & \text{si } 1/n < x < 1. \end{cases}$$

Exercice 5. *Soient* $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ *et* $\alpha > 0$. *On considère le problème suivant*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u + u & = & f & (\Omega) \\ \partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u & = & g & (\partial\Omega) \end{array} \right.$$

1. *Donnez sa formulation variationnelle*

2. *Peut-on appliquer le Théorème de Lax-Milgram ?*

Exercice 6. *Soit* $\gamma\colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ *l'application trace sur* $\partial\Omega$. *On considère l'espace de Sobolev des fonctions de* $H^1(\Omega)$ *de trace nulle :*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma(u) = 0 \right\}.$$

Soient $f \in L^2(\Omega)$ *et le problème suivant*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f & (\Omega) \\ u & = & 0 & (\partial\Omega) \end{array} \right.$$

1. *Donnez sa formulation variationnelle dans* $H_0^1(\Omega)$

2. *A l'aide de l'inégalité de Poincaré :*

$$\exists C > 0 / \forall v \in H_0^1(\Omega), \qquad C\,\|v\|^2_{H^1(\Omega)} \le \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)},$$

   montrez que la formulation variationnelle admet une unique solution.

2 Correction

Exercice 1. *Soit Ω un ouvert borné et régulier de classe $\mathscr{C}^1$. On supposera u, v, ϕ, ψ et σ suffisamment dérivables à chaque fois. À l'aide de la formule de Green, montrez les formules suivantes*

1. *La formule du Laplacien*

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x)\, v(x)\,\mathrm{d}s,$$

   où $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)_{1\leq i\leq d}$ est le vecteur gradient de u, et $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \nabla u\cdot\mathbf{n}$.

2. *La formule de Stokes :*

$$\int_\Omega \mathrm{div}\sigma(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \sigma(x)\cdot\nabla\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\sigma(x)\cdot\mathbf{n}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}s.$$

3. *La formule du rotationnel :*

$$\int_\Omega \mathrm{rot}\phi\cdot\psi\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \phi\cdot\mathrm{rot}\psi\,\mathrm{d}x = -\int_{\partial\Omega}(\phi\times\mathbf{n})\cdot\psi\,\mathrm{d}s,$$

   où le rotationnel est défini par

$$\mathrm{rot}\phi = \left(\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2} - \frac{\partial\phi_2}{\partial x_3}, \frac{\partial\phi_1}{\partial x_3} - \frac{\partial\phi_3}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\right)$$

Correction.

1. Nous pouvons calculer direction par direction (l'inversion somme-intégrale est rendue possible puisque Ω est borné et la somme finie) :

$$\int_\Omega \Delta u(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^3 \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Nous appliquons ensuite la formule de Green et re-regroupons les sommes :

$$\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{j=1}^3 \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x & = & \displaystyle\sum_{j=1}^3\left[-\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\, v(x)\, n_j(x)\,\mathrm{d}x\right]\\ & = & \displaystyle -\int_\Omega \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\frac{\partial v}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^3\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\, n_j(x)\right] v(x)\,\mathrm{d}x\\ & = & \displaystyle -\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}(\nabla u(x)\cdot\mathbf{n}(x))\, v(x)\, n_j(x)\,\mathrm{d}x.\end{array}$$

   Comme $\nabla u(x)\cdot\mathbf{n}(x) = \partial_{\mathbf{n}} u(x)$, le résultat est démontré.

2. Nous appliquons la même idée :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{div}\sigma(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_j}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{j=1}^3 \int_\Omega \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_j}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

À l'aide de la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^3 \int_\Omega \frac{\partial \sigma_j}{\partial x_j}(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{j=1}^3 \left[-\int_\Omega \sigma_j(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \sigma_j(x)\phi(x)n_j(x)\,\mathrm{d}s\right] \\
&= -\int_\Omega \sum_{j=1}^3 \left[\sigma_j(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x)\right]\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^3 \left[\sigma_j(x)n_j(x)\right]\phi(x)\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_\Omega \sigma(x)\cdot\nabla\phi(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}(\sigma(x)\cdot\mathbf{n}(x))\phi(x)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

3. Pour simplifier, nous notons $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \operatorname{rot}\phi\cdot\psi\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \left[\partial_2\phi_3 - \partial_3\phi_2\right]\psi_1 + \left[\partial_3\phi_1 - \partial_1\phi_3\right]\psi_2 + \left[\partial_1\phi_2 - \partial_2\phi_1\right]\psi_3\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_\Omega \phi_3\partial_2\psi_1 - \phi_2\partial_3\psi_1 + \phi_1\partial_3\psi_2 - \phi_3\partial_1\psi_2 + \phi_2\partial_1\psi_3 - \phi_1\partial_2\psi_3\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \left[\phi_3 n_2 - \phi_2 n_3\right]\psi_1 + \left[\phi_1 n_3 - \phi_3 n_1\right]\psi_2 + \left[\phi_2 n_1 - \phi_1 n_2\right]\psi_3\,\mathrm{d}s \\
&= -\int_\Omega \left[\partial_3\psi_2 - \partial_2\psi_3\right]\phi_1 + \left[\partial_1\psi_3 - \partial_3\psi_1\right]\phi_2 + \left[\partial_2\psi_1 - \partial_1\psi_2\right]\phi_3 \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} (\phi\times\mathbf{n})\cdot\psi\,\mathrm{d}s \\
&= \int_\Omega \phi\cdot\operatorname{rot}\psi\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}(\phi\times\mathbf{n})\cdot\psi\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

□

Exercice 2. *Montrer que* ($\eta > 0$)

$$\begin{array}{rccl}
a(.,.): & \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})\times\mathscr{C}^1(\overline{\Omega}) & \to & \mathbb{C} \\
& (u,v) & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x + \eta\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x,
\end{array}$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$.

Correction. Du fait de la linéarité de l'intégrale, $a(\cdot,\cdot)$ est clairement linéaire à gauche et anti-linéaire à droite : c'est une forme sesquilinéaire. Il ne nous reste à montrer que deux autres propriétés (en utilisant $z\overline{z} = |z|^2$) :

$$a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Enfin, si $a(u,u) = 0$ alors, en tant que somme de termes positifs, cela implique que $\int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0 = \|u\|_{L^2(\Omega)}$. Il ne nous reste plus qu'à montrer que u est nulle dans $\mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$. Supposons qu'il existe

$x_0 \in \Omega$ tel que $|u(x_0)| > 0$. Comme $|u|$ est continu sur Ω, alors il existe un ouvert U autours de x_0 tel que $|u(x)| > 0$ dans U. Par suite, nous avons que

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \geq \int_U |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x > 0,$$

ce qui est absurde et nous pouvons conclure que la fonction u est nulle dans Ω. □

Exercice 3. *Donnez la formulation variationnelle du système suivant (équation de Helmholtz) dans $H^1(\Omega)$, où $k > 0$:*

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u &= f \quad (\Omega) \\ \partial_{\mathbf{n}} u &= 0 \quad (\Gamma := \partial\Omega) \end{cases}$$

Faites de même en remplaçant la condition aux limites sur $\partial\Omega$ par ($\imath = \sqrt{-1}$) :

$$\partial_{\mathbf{n}} u - \imath k u = 0.$$

Correction. En multipliant par (le conjugué d') une fonction test v et en intégrant sur Ω et en utilisant le fait que $\partial_{\mathbf{n}} u = 0$ sur $\partial\Omega$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \Delta u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega k^2 u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x \\ \iff & -\int_\Omega \nabla u(x)\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}s + k^2\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x \\ \iff & -\int_\Omega \nabla u(x)\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x + k^2\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

La formulation faible s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad -\displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x + k^2\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x. \end{cases}$$

Si la condition sur $\partial\Omega$ change en $\partial_{\mathbf{n}} u - \imath k u = 0$ alors la formulation faible devient

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1(\Omega), -\displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x + k^2\int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x + \imath k\int_{\partial\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}s = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x. \end{cases}$$

□

Exercice 4. *Soit $\Omega =]1\,,1[$. Montrez que la fonction valeur absolue $f : x \longmapsto |x|$ est dans $H^1(\Omega)$ et calculez sa dérivée faible, que lon note f' . Est-ce que $f' \in H^1(\Omega)$? Si oui, calculez sa dérivée faible.*

Correction. La fonction valeur absolue f est contiune sur Ω et dérivable sur $]-1\,,0[$ et sur $]0\,,1[$. Nous montrons que f admet une dérivée faible dans Ω tout entier. Prenons une fonction φ de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Sur $]-1\,,0[$, f admet une dérivée forte qui vaut -1, qui est aussi sa dérivée faible. De même sur $]0\,,1[$ avec comme dérivée la fonction constante égale à 1. En notant g la fonction de $L^2(\Omega)$ telle que $g(x) = -1$ pour $x \in]-1\,,0[$ et $g(x) = 1$ pour $x \in [0\,,1[$, nous avons :

$$\int_\Omega f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cette relation étant valable pour tout φ de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, nous en déduisons que g est la dérivée faible de f et donc que $f \in H^1(\Omega)$.

La fonction g est dans $L^2(\Omega)$ et supposons que $g \in H^1(\Omega)$, autrement dit, qu'elle admet une dérivée faible $h \in L^2(\Omega)$, c'est à dire

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Plaçons nous sur $[0\,,1[$ uniquement (g y est continue et constante de valeur 1), nous avons

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int_0^1 g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \left[\varphi(x)\right]_{x=0}^{x=1} = -\varphi(0),$$

car $\varphi(1) = 0$ du fait que φ est dans $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. De même sur $]-1\,,0[$, nous avons

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int_{-1}^0 g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\left[\varphi(x)\right]_{x=-1}^{x=0} = -\varphi(0),$$

Nous obtenons ainsi une première relation, pour tout φ de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 2\varphi(0).$$

Prenons maintenant des fonctions φ de $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ particulières, à support dans $]-1\,,0[$ uniquement. Autrement dit, ces fonctions φ sont nulles sur $[0\,,1[$ et en particulier en 0, mais la relation ci-dessus reste valable, et nous obtenons

$$\int_\Omega h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 g(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 2\varphi(0) = 0$$

Ainsi, nous avons montré que, pour tout fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty([-1\,,0[)$, alors $\int_{-1}^0 h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Ce qui signifie que $h = 0$ presque partout dans $]-1\,,0[$. Nous faisons de même sur $]0\,,1[$ pour obtenir que $h = 0$ presque partout dans $]0\,,1[$ et par suite presque partout dans Ω. Ceci est absurde, puisqu'alors, nous avons

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \qquad \int_\Omega h(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0 = 2\varphi(0).$$

Nous concluons que la fonction g n'est pas dans $H^1(\Omega)$. □

Exercice 5. *Plaçons nous en dimension* 1 *sur l'intervalle* $\Omega =]-1\,,1[$. *Montrez que l'espace* $\mathscr{C}^1(\Omega)$...

- *N'est pas complet pour la norme* $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega}|f(x)|$
- *Est complet pour la norme* $N(f) = \sup_{x\in\Omega}|f(x)| + \sup_{x\in\Omega}|f'(x)|$
- *N'est pas complet pour la norme* $N_{H^1(\Omega)}(f) = \left(\int_\Omega |f(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$

Pour montrer la non complétude de l'espace, nous suggérons d'étudier la suite de fonction $(u_n)_n$ *définit sur* Ω *par*

$$\forall x \in \Omega, \quad u_n(x) = \begin{cases} -x-1, & si\ -1 < x \leq -1/n, \\ (n/2)x^2 - 1 + 1/(2n), & si\ -1/n < x < 1/n, \\ x-1, & si\ 1/n \geq x < 1. \end{cases}$$

Correction. Montrons la complétude pour la norme N. Montrons tout d'abord que $\mathscr{C}^0(\Omega)$ est complet pour la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$. En effet, prenons une suite de Cauchy $(u_n)_n$ de $\mathscr{C}^0(\Omega)$ pour cette norme :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n, p > N, \|u_n - u_p\|_\infty < \varepsilon,$$

ou encore

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n, p > N, \forall x \in \Omega, \left|u_n(x) - u_p(x)\right| < \varepsilon.$$

Cette expression implique que, à x fixé, la suite $(u_n(x))_n$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet. Cela implique que, pour tout x, la suite $(u_n(x))_n$ converge vers un point de $\mathbb{R}$ que l'on nomme $u(x)$, où u est une application de Ω dans $\mathbb{R}$. La suite $(u_n)_n$ est de Cauchy, par conséquent, nous avons, en faisant tendre p vers l'infini :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0 : \forall n > N, \forall x \in \Omega, |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon,$$

ce qui montre que $(u_n)_n$ converge uniformément vers u, et donc que u est continu. Revenons à $\mathscr{C}^1(\Omega)$ et la norme N. Prenons une suite de Cauchy $(u_n)_n$ de $\mathscr{C}^1(\Omega)$ pour la norme N :

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n, p > N, \|u_n - u_p\|_\infty + \|u_n' - u_p'\|_\infty < \varepsilon.$$

Chaque terme $\|u_n - u_p\|_\infty$ et $\|u_n' - u_p'\|_\infty$ est positif, et nous avons donc

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N > 0 : \forall n, p > N, \left\{ \begin{array}{l} \|u_n - u_p\|_\infty < \varepsilon \\ \|u_n' - u_p'\|_\infty < \varepsilon. \end{array} \right.$$

En d'autres termes, les suites $(u_n)_n$ et $(u_n')_n$ sont de Cauchy dans $\mathscr{C}^0(\Omega)$. Elles convergent donc toutes deux vers respectivement u et v, éléments de $\mathscr{C}^0(\Omega)$, pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. De ce qui précède, nous pouvons montrer que les suites de fonction $(u_n)_n$ et $(u_n')_n$ convergent uniformément vers u et v, ce qui implique que u est dérivable et $u' = v$.

Montrons maintenant la non-complétude de $\mathscr{C}^1(\Omega)$ pour les deux autres normes, à l'aide de la suite de fonctions proposée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, \quad u_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x-1, & \text{si } -1 < x \leq -1/n, \\ (n/2)x^2 - 1 + 1/(2n), & \text{si } -1/n < x < 1/n, \\ x-1, & \text{si } 1/n \geq x < 1. \end{array} \right.$$

Si on dessine la fonction, on constate qu'elle ressemble à la fonction $u\colon x \longmapsto |x| - 1$, à ceci près qu'elle est "courbe" sur l'axe des ordonnées (cf Figure 2.1). La fonction u n'est pas dans $\mathscr{C}^1(\Omega)$, donc si nous arrivons à montrer que $(u_n)_n$ converge vers u au sens d'une certaine norme, alors nous aurons montré que $\mathscr{C}^1(\Omega)$ n'est pas complet pour cette norme (puisqu'on aura construit une suite qui converge mais vers un élément qui n'appartient pas à $\mathscr{C}^1(\Omega)$).

Montrons déjà que les fonctions u_n sont dans $\mathscr{C}^1(\Omega)$. Elle sont clairement $\mathscr{C}^1$ sur chaque morceau $]-1\,;-1/n]$, $]-1/n\,;1/n[$ et $[1/n\,,1[$. D'autre part, elles sont symétriques par rapport à l'axe Oy ($u_n(x) = u_n(-x)$) : on peut se contenter de les étudier sur $[0\,,1[$. En $1/n$, nous avons $\lim_{x\in[0,1/n[\to 1/n} u_n(x) = (n/2)(1/n)^2 - 1 + 1/(2n) = -1 + 1/n = u(1/n)$. Nous pouvons calculer la dérivée de u_n sur chaque intervalle et vérifier qu'elle est continue sur tout Ω :

$$u_n'(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -1 & -1 < x \leq -1/n \\ nx & -1/n < x < 1/n \\ 1 & 1/n \leq x \leq 1. \end{array} \right.$$

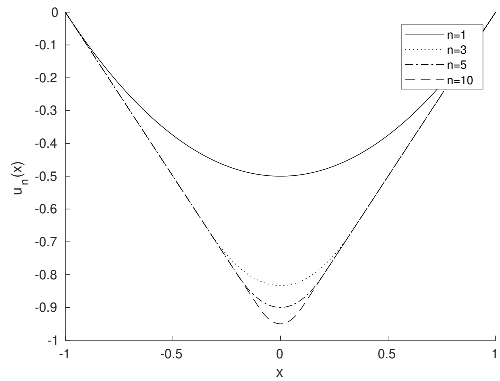

FIG. 2.1 : $u_n(x)$ pour différentes valeurs de n.

En $1/n$, la limite de $u_n'(x)$ de chaque côté vaut 1, et donc u_n' est continue et u_n est $\mathscr{C}^1$ sur Ω. Montrons maintenant que $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $u(x) = |x|-1$ pour tout x de Ω (convergence point à point). Encore une fois, du fait des symétries, nous travaillons uniquement sur $[0\,,1[$ sur lequel $|x| = x$. Nous obtenons :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in [0,1/n[, & |u_n(x) - u(x)| = (n/2)x^2 - 1 + 1/(2n) - (x-1) = (n/\sqrt{2})\,(x-1/n)^2 \\ \forall x \in [1/n,1[, & |u_n(x) - u(x)| = x - 1 - (x-1) = 0 \end{array}.$$

Sur l'intervalle $[1/n\,,1[$, nous avons bien $u_n = u$. L'expression ci-dessus montre d'autre part que $|u_n(0) - |0| - 1| = 0$. À x fixé, $1/n > x > 0$, quand n tend vers l'infini, il existe alors un rang N tel que pour $n > N$, alors $x > 1/n$, et on a alors $|u_n(x) - |x| - 1| = 0$ (le point x bascule dans l'autre intervalle). La suite $(u_n(x))_n$ converge donc vers $|x|-1$, pour tout x de Ω.

La convergence point à point est démontrée, mais pas la convergence en norme. Il ne nous reste plus quà montrer que $u_n \to u$ au sens de la norme infini $\|\cdot\|_\infty$ et de la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

- Pour la norme infinie. De ce qui précède, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n - u\|_\infty = \max_{x\in[0,1/n]} (n/\sqrt{2})\,(x-1/n)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}n} \to 0 (n \to +\infty).$$

  Pour la norme infinie, la suite $(u_n)_n$ converge vers u qui n'est pas dans $\mathscr{C}^1(\Omega)$. Cela permet de conclure que $\mathscr{C}^1(\Omega)$ muni de la norme infinie n'est pas complet.

- Prenons maintenant la norme de $H^1(\Omega)$, en remarquant que u est dans $H^1(\Omega)$ (exercice 4), de dérivée constante égale à 1 sur $[0\,,1[$:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|u_n - u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_{-1}^1 |u_n(x) - u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^1 \left|u_n'(x) - u'(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 |u_n(x) - u(x)|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 \left|u_n'(x) - u'(x)\right|^2 \mathrm{d}x \\ &= \frac{n^4}{4} 2\int_0^{1/n} \left(x - \frac{1}{n}\right)^4 \mathrm{d}x + 2\int_0^{1/n} (nx-1)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{n^4}{2}\frac{1}{5}\left[\left(x - \frac{1}{n}\right)^5\right]_{x=0}^{x=1/n} + 2\frac{1}{3n}\left[(nx-1)^3\right]_{x=0}^{x=1/n} \\ &= \frac{1}{10n^4} + \frac{2}{3n} \to 0 (n \to \infty). \end{aligned}$$

Et voilà : la suite de fonctions $(u_n)_n$ converge bien vers u au sens de la norme de $H^1(\Omega)$.

Remarque 2.1. *Bien que $(u_n(x))_n$ converge vers $u(x)$ en tout point x, la suite de fonctions $(u_n)_n$* ***ne converge pas*** *vers u au sens de la norme N !*

□

Exercice 6. *Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$ et $\alpha > 0$. On considère le problème suivant*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + u & = & f & (\Omega) \\ \partial_{\mathbf{n}} u + \alpha u & = & g & (\partial\Omega) \end{array}\right.$$

1. *Donnez sa formulation variationnelle*
2. *Peut-on appliquer le Théorème de Lax-Milgram ?*

Correction. 1. Après multiplication par des fonctions tests $\overline{v}$, intégration sur Ω et utilisation de la formule de Green, nous obtenons

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)}\, \mathrm{d}x + \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x,$$

soit en utilisant la condition aux limites sur $\partial\Omega$:

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)}\, \mathrm{d}x + \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x + \alpha \int_{\partial\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}s = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x, + \int_{\partial\Omega} g(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}s.$$

Nous en déduisons la formulation faible

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que, } \forall v \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)}\, \mathrm{d}x + \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x + \alpha \int_{\partial\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}s = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}s. \end{array}\right.$$

2. Notons $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ les fonctiosn définies par

$$\begin{array}{l} a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \overline{\nabla v(x)}\, \mathrm{d}x + \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x + \alpha \int_{\partial\Omega} u(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}s, \\ \ell(v) = \displaystyle\int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}s. \end{array}$$

Clairement, $a(\cdot,\cdot)$ est sesquilinéaire et ℓ est anti-linéaire. Montrons les autres hypothèses pour le théorème de Lax Milgram :

1. Continuité de $\ell(\cdot)$.

$$\begin{array}{rcl} |\ell(v)| & = & \left|\displaystyle\int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} g(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}s\right| \\ & \leq & \left|\displaystyle\int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}x\right| + \left|\displaystyle\int_{\partial\Omega} g(x)\overline{v(x)}\, \mathrm{d}s\right| \\ & \leq & \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\ & \leq & \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{array}$$

   où C est la constante de continuité de la trace. On utilise ensuite le fait que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}$ (continuité de la trace) pour obtenir la continuité

$$|\ell(v)| \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{L^2(\partial\Omega)}\right)\|v\|_{H^1(\Omega)}$$

2. Continuité de $a(\cdot\,,\cdot)$:

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x + \alpha\int_{\partial\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}s\right| \\
&\le \left|\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\alpha\int_{\partial\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}s\right| \\
&\le \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \alpha\left|\int_{\partial\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}s\right| \\
&\le \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \alpha\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\le \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \alpha C^2\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \\
&\le (1+\alpha C^2)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

3. Coercivité de $a(\cdot\,,\cdot)$:

$$\begin{aligned}
a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \alpha\int_{\partial\Omega}|u(x)|^2\,\mathrm{d}s \\
&\ge \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\ge \|u\|^2_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Conclusion : les hypothèses du théorème de Lax Milgram sont bien validées. Le problème admet une unique solution. □

Exercice 7. *Soit $\gamma\colon H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$ l'application trace sur $\partial\Omega$. On considère l'espace de Sobolev des fonctions de $H^1(\Omega)$ de trace nulle :*

$$H^1_0(\Omega) = \left\{u\in H^1(\Omega) \text{ tel que } \gamma(u)=0\right\}.$$

On admet que $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Soient $f\in L^2(\Omega)$ et le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& f & (\Omega)\\ u &=& 0 & (\partial\Omega)\end{array}\right.$$

1. *Donnez sa formulation variationnelle dans $H^1_0(\Omega)$*

2. *A l'aide de l'inégalité de Poincaré :*

$$\exists C>0/\forall v\in H^1_0(\Omega),\qquad C\|v\|^2_{H^1(\Omega)}\le\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^3},$$

montrez que la formulation variationnelle admet une unique solution. Notez que :

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)^3} = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla u(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

Correction. 1. Après multiplications par $\overline{v}\in H^1_0(\Omega)$, intégration sur Ω et formule de Green, nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega -\Delta u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow &\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x \\
\Longleftrightarrow &\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

car la trace de u sur $\partial\Omega$ est nulle. La formulation faible devient

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.\end{array}\right.$$

2. Nous verrons en cours que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Outre l'anti-linéarité et la sesquilinéairité, nous devons montrer les continuités de $a(\cdot\,,\cdot)$ et ℓ(cot) ainsi que la coercivité de $a(\cdot\,,\cdot)$, avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x, \quad \ell(v) = \int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x.$$

- Continuité de ℓ :

$$|\ell(v)| = \left|\int_\Omega f(x)\overline{v(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

- Continuité de a :

$$|a(u,v)| = \left|\int_\Omega \nabla u(x)\cdot\overline{\nabla v(x)}\,\mathrm{d}x\right| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3}.$$

  Or, nous avons,

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3},$$

  ce qui implique que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3} \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

  Nous obtenons ainsi la continuité de $a(\cdot\,,\cdot)$:

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

- Coercivité de $a(\cdot\,,\cdot)$, en utilisant l'inégalité de Poincaré :

$$|a(u,u)| = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{C}\|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

$\square$