Correction TD 2 : Condition de Dirichlet et éléments finis $\mathbb{P}^2$

2

Exercice 1

Question 1 : Sans nous préoccuper de régularité, nous multiplions par une fonction test v **nulle sur** Γ_D et nous intégrons sur Ω :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega -\Delta u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0 &\Longrightarrow \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0\\
&\Longrightarrow \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_F} \alpha u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Gamma_F} f(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = 0\\
&\Longrightarrow \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_F} \alpha u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\Gamma_F} f(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire la formulation faible. Pour cela, nous choisissons l'espace de Hilbert suivant :

$$H^1_{0,D}(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \;\middle|\; v|_{\Gamma_D} = 0 \right\},$$

avec pour norme, la même sur sur $H^1(\Omega)$, soit :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |v(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega \|\nabla v(\mathbf{x})\|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

La formulation variationnelle est :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1_{0,D} \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1_{0,D}, \quad a(u,v) = \ell(v), \end{array} \right.$$

avec

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_F} \alpha u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_{\Gamma_F} f(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Question 2 : L'espace $H^1_{0,D}$ est un espace de Hilbert et a et ℓ sont respectivement sesquilinéaire et anti-linéaire. Nous vérifions les autres hypothèses du Théorème de Lax-Milgram, en rappelant que nous avons les inégalités suivantes, pour tout v de $H^1(\Omega)$:

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'autre part, nous avons :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Gamma_F)} \leq \|v\|_{L^2(\partial\Omega)},$$

car $\|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Gamma_F)} + \|v\|^2_{L^2(\Gamma_D)}$ et les normes sont toujours positives. Enfin, comme l'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, nous avons :

$$\exists C > 0 | \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Gamma_F)} \leq \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Enfin, pour tout fonction $v \in H^1_{O,D}$, nous rappelons l'inégalité de Poincaré

$$\exists C_p > 0 | \forall v \in H^1_{O,D}, \quad \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \geq C_p \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Armé de toutes ces inégalités, nous pouvons démontrer que nous travaillons sous les hypothèses du théorème de Lax Milgram :

- Continuité de ℓ : soit $v \in H^1_{0,D}$,

$$\begin{aligned}
|\ell(v)| &= \left|\int_{\Gamma_F} f(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right| \leq \left|\int_{\Gamma_F} f(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right| && \text{(Inégalité Triangulaire)}\\
&\leq \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} && \text{(Cauchy Schwarz)}\\
&\leq \left\|f\right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

- Continuité de a : soient u et v dans $H^1_{0,D}$,

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \alpha\int_{\Gamma_F} u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right|\\
&\leq \left|\int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right| + \left|\alpha\int_{\Gamma_F} u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right| && \text{Inégalité triangulaire}\\
&\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \alpha\|u\|_{L^2(\Gamma_F)}\|v\|_{L^2(\Gamma_F)} && \text{Cauchy Schwarz}\\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \alpha\|u\|_{L^2(\partial\Omega)}\|v\|_{\partial\Omega}\\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + \alpha C^2\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Continuité de la trace}\\
&\leq (1+\alpha C^2)\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

- Coercivité de a ($u \in H^1 0, D$) :

$$\begin{aligned}
\Re(a(u,u)) &= \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \alpha\int_{\Gamma_F} |u(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
&\geq \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \text{Car } \alpha > 0\\
&\geq C_p\|u\|^2_{H^1(\Omega)} && \text{Inégalité de Poincaré}
\end{aligned}$$

Toutes les hypothèses sont validées, donc le problème admet une unique solution.

Exercice 2

Question 1 : On introduit un relèvement u_g tel que $u_g|_{\partial\Omega} = g$, et la nouvelle inconnue $u = w - u_g$ de sorte que u vérifie

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \Delta u_g & (\Omega)\\ u &=& 0 & (\partial\Omega)\end{array}\right.$$

Notez que pour l'instant, nous n'imposons aucune contrainte de régularité au relèvement u_g. Nous savons par ailleurs que ce relèvement existe.

Question 2 : Sans nous préoccuper de régularité, nous multiplions par une fonction test v **nulle sur** $\partial\Omega$ et nous intégrons sur Ω :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega -\Delta u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega \Delta u_g(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
\implies &\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega}\partial_{\mathbf{n}}u(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla u_g(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}\partial_{\mathbf{n}}u_g(\mathbf{x})\overline{v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\
\implies &\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla u_g(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

Nous savons maitnenant qu'une régularité de type $H^1(\Omega)$ nous suffirait. Comme nous devons également imposer une condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$, nous travaillerons dans l'espace $H^1_0(\Omega)$. La formulation variationnelle s'écrit alors

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Trouver } u\in H^1_0(\Omega) \text{ tel que}\\
\forall v\in H^1_0(\Omega),\quad a(u,v)=\ell(v),
\end{array}\right.$$

avec, pour u et v de $H^1_0(\Omega)$:

$$a(u,v)=\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\quad\text{et}\quad \ell(v)=-\int_\Omega \nabla u_g(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Question 3 : L'espace $H^1_0(\Omega)$ est un espace de Hilbert et a et ℓ sont respectivement sesquilinéaire et antilinéaire (par linéarité de l'intégrale). Nous rappelons les inégalités suivantes (cf. exercise précédent) :

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \geq \|v\|_{H^1(\Omega)},$$

et l'inégalité de Poincaré :

$$\exists C_p>0 | \forall v\in H^1_0(\Omega),\quad \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \geq C_p\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Nous vérifions les autres hypothèses du Théorème de Lax-Milgram :

- Continuité de ℓ : soit $v\in H^1_0(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
|\ell(v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u_g(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right|\\
&\leq \left\|\nabla u_g\right\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{Cauchy-Schwarz (produit scalaire } L^2(\Omega))\\
&\leq \left\|\nabla u_g\right\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

- Continuité de a ($u, v\in H^1_0(\Omega)$) :

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\overline{\nabla v(\mathbf{x})}\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right|\\
&\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{Cauchy-Schwarz (produit scalaire } L^2(\Omega))\\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

- Coercivité de a ($u \in H^1_0(\Omega)$) :

$$\Re(a(u,u)) = \int_\Omega |\nabla u(\mathbf{x})|^2 \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq C_p \,\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

Toutes les hypothèses sont vérifiées : le problème admet une unique solution.

Remarquez que nous n'avons pas défini le relèvement. Pour des éléments finis $\mathbb{P}^1$, un relèvement naturelle serait la fonction éléments finis ayant pour valeurs g sur les sommets du bord, et 0 sur les sommets internes.

Exercice 3

Question 1 : Nous savons que les trois fonctions de forme $\mathbb{P}^1$ du triangle de référence s'écrivent :

$$\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) = \xi, \quad \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) = \eta.$$

En sommant ces trois termes, il vient que :

$$\forall(\xi,\eta) \in \widehat{K}, \quad \widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) + \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) + \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) = 1.$$

Question 2 : Soit $(x,y) \in K$ et $(\xi,\eta) \in \widehat{K}$ tel que $(x,y) = T^K(\xi,\eta)$. Nous avons alors, pour $j = 1,2,3$:

$$\varphi_j(x,y) = \varphi_j(T^K(\xi,\eta)) = \varphi_j(\sum_{i=1}^{3} \mathbf{s}_i^K \widehat{\psi}_i(\xi,\eta)) = \sum_{i=1}^{3} (\widehat{\psi}_i(\xi,\eta)\varphi_j(\mathbf{s}_i^K)) = \widehat{\psi}_j(\xi,\eta) = \widehat{\varphi}_j(\xi,\eta).$$

Autrement dit, nous avons :

$$\forall(x,y) \in K, \exists(\xi,\eta) \in \widehat{K} \text{ tels que } \sum_{i=1}^{3} \varphi_i(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \widehat{\varphi}_i(\xi,\eta) = 1.$$

Exercice 4

Question 1 : Nous savons que les trois fonctions de forme $\mathbb{P}^1$ du triangle de référence s'écrivent :

$$\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) = \xi, \quad \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) = \eta.$$

Question 2 : Soient 6 données α_i pour $i = 1,\ldots,6$ et un polynôme p de degré 2 tel que $p(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \alpha_i$, pour $i = 1,\ldots,6$. Nous avons donc, si $p(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ ($a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C}$) :

$$\left\{\begin{array}{lclcl}
p(\widehat{\mathbf{s}}_1) & = & p(0,0) & = & f = \alpha_1 \\
p(\widehat{\mathbf{s}}_4) & = & p(1/2,0) & = & 0.25a + 0.5d + \alpha_1 = \alpha_4 \\
p(\widehat{\mathbf{s}}_2) & = & p(1,0) & = & a + d + \alpha_1 = \alpha_2 \\
p(\widehat{\mathbf{s}}_6) & = & p(0,1/2) & = & 0.25b + 0.5e + \alpha_1 = \alpha_6 \\
p(\widehat{\mathbf{s}}_3) & = & p(0,1) & = & b + e + \alpha_1 = \alpha_3 \\
p(\widehat{\mathbf{s}}_5) & = & p(1/2,1/2) & = & 0.25(a+b) + 0.5(d+e) + 0.25c + \alpha_1 = \alpha_5
\end{array}\right.$$

Les lignes 2 et 3 permettent d'obtenir a et d. De même, les lignes 3 et 4 nous fournissent b et e. La dernière ligne nous donnera c : le système est résolvable, et ce de manière unique. Autrement dit, il n'existe qu'un polynôme p de degré 2 qui vérifie la propriété demandée.

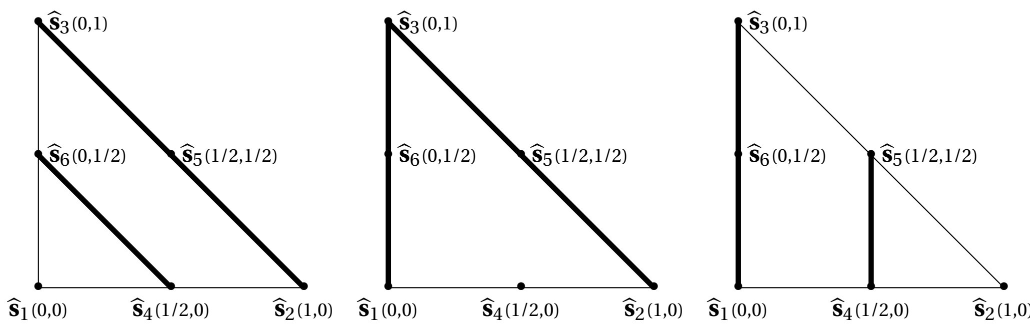
Question 3 : Nous savons que si nous trouvons un polynôme p_j de degré 2, tel que $p_j(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \delta_{i,j}$ alors ce polynôme est unique. Autrement dit, si nous en trouvons un, alors nous avons trouvé l'unique.

Prenons l'exemple de $\widehat{\phi}_1$, polynôme de degré 2 nul sur tous les nœuds sauf $\widehat{\mathbf{s}}_0$. La fonction suivante remplit parfaitement son rôle :

$$\widehat{\phi}(\xi,\eta) = 2(1-\xi-\eta)(\frac{1}{2}-\xi-\eta).$$

Pour l'obtenir, on cherche deux polynômes de degré 1 : le premier s'annule sur la droite contenant les sommets $\widehat{\mathbf{s}}_2$,$\widehat{\mathbf{s}}_5$ et $\widehat{\mathbf{s}}_3$ (c'est $(\xi\,,\eta) \longmapsto 1-\xi-\eta$), tandis que le deuxième sur la droite passant par $\widehat{\mathbf{s}}_4$ et $\widehat{\mathbf{s}}_6$ (c'est $(\xi\,,\eta) \longmapsto 1/2-\xi-\eta$). Ensuite, nous multiplions ces deux polynômes et remultiplions le tout par 2 pour obtenir $\widehat{\phi}(0\,,0) = 1$. Une illustration est donnée sur la figure 2.1. Au final, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl|rcl}
\widehat{\phi}_1(\xi,\eta) & = & 2(1-\xi-\eta)\left(\frac{1}{2}-\xi-\eta\right) & \widehat{\phi}_4(\xi,\eta) & = & 4\xi(1-\xi-\eta)\\
\widehat{\phi}_2(\xi,\eta) & = & 2\xi\left(\xi-\frac{1}{2}\right) & \widehat{\phi}_5(\xi,\eta) & = & 4\xi\eta\\
\widehat{\phi}_3(\xi,\eta) & = & 2\eta\left(\eta-\frac{1}{2}\right) & \widehat{\phi}_6(\xi,\eta) & = & 4\eta(1-\xi-\eta)
\end{array}$$



(a) Obtention de $\widehat{\phi}_1$. (b) Obtention de $\widehat{\phi}_4$. (c) Obtention de $\widehat{\phi}_2$.

FIG. 2.1 : Méthode pour obtenir les fonctions de base $\mathbb{P}^2$. En gras les deux droites où la fonction doit nécessairement s'annuler.

Question 4 : Soient $(\alpha_i)_{1\leq i\leq 6}$ six scalaires complexes, nous avons :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6}\alpha_i\widehat{\phi} = 0 &\Longrightarrow \forall(\xi,\eta)\in\widehat{K},\quad \sum_{i=1}^{6}\alpha_i\widehat{\phi}(\xi,\eta) = 0\\
&\Longrightarrow \forall j = 1,\ldots,6,\quad \sum_{i=1}^{6}\alpha_i\widehat{\phi}(\widehat{\mathbf{s}}_j) = 0\\
&\Longrightarrow \forall j = 1,\ldots,6,\quad \alpha_j = 0
\end{aligned}$$

La famille de fonctions $\widehat{\phi}$ est donc libre. De plus, elle est de cardinal 6, soit exactement la dimension de l'espace des polynômes de degré 2 sur $\widehat{K}$: elle en forme une base.