Examen 1 – correction

Exercice 1 – Du cours

Question 1 : Soit V un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $(\cdot,\cdot)_V$ et d'une norme $\|\cdot\|_V$. Soit la formulation variationnelle suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que}\\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v).\end{array}\right.$$

Sous les hypothèses suivantes, la formulation variationnelle admet une unique solution :

- a est une forme sesquilinéaire sur $V \times V$ et ℓ une forme anti linéaire sur V
- a est continue : $\exists M > 0$ tel que $\forall u, v \in V, |a(u,v)| \leq M\|u\|_V\|v\|_V$
- ℓ est continue : $\exists C > 0$ tel que $\forall v \in V, |\ell(v)| \leq C\|v\|_V$
- a est coercive : $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u \in V, \Re(a(u,u)) \geq \alpha\|u\|_V^2$

Question 2 : Soit $u \in L^2(\Omega)$, alors u admet une dérivée faible dans la direction x_i s'il existe une fonction $g \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega), \quad \int_\Omega u(\mathbf{x})\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = -\int_\Omega g(\mathbf{x})\varphi(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}$$

Question 3 : Soit $u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$, alors pour $i = 1, 2, \ldots, d$ (où d est la dimension du problème) :

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x})\mathbf{n}_i(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x},$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante à Ω.

Question 4 : Nous prenons $u \in \mathscr{C}^2(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} &= \int_\Omega \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \\
&= \sum_{j=1}^d \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \text{Somme et intégrale finies}\\
&= \sum_{j=1}^d \left[-\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathbf{n}_i(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right] && \text{Formule de Green}\\
&= -\int_\Omega \sum_{j=1}^d \frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x})\frac{\partial v}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^d\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(\mathbf{x})\mathbf{n}_j(\mathbf{x})\right)v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \text{Sommes et intégrales finies}\\
&= -\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}(\nabla u(\mathbf{x})\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}))\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \text{Définition gradient}\\
&= -\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega}\partial_{\mathbf{n}}u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} && \text{Définition dérivée normale}
\end{aligned}$$

Exercice 2 – Formulation faible

Question 1 : $V = H^1(\Omega)$, de norme $\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 + |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x$. Nous multiplions l'EDP par $v \in H^1(\Omega)$, intégrons sur Ω :

$$\begin{array}{ll}
\int_\Omega -\Delta u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \eta \int_\Omega u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \eta \int_\Omega u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & \text{Formule de Green} \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \eta \int_\Omega u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Gamma_1} g(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & (\partial_{\mathbf{n}} u)|_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } (\partial_{\mathbf{n}} u)|_{\Gamma_1} = g \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \eta \int_\Omega u(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} g(\mathbf{x})\, v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} & \text{Regroupement des termes}
\end{array}$$

Au final, nous obtenons les formes a et ℓ, pour tout $u, v \in V = H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \eta \int_\Omega u(x) \nabla v(x)\,\mathrm{d}x, \quad \ell(v) = \int_\Omega f(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} g(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Question 2 : Comme $\int_{\Gamma_0} |w(x)|^2 \,\mathrm{d}x \geq 0$, nous avons

$$\int_{\partial\Omega} |w(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\Gamma_0} |w(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} |w(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq \int_{\Gamma_1} |w(x)|^2\,\mathrm{d}x.$$

D'autre part, comme l'application trace $\gamma \colon H^1(\Omega) \to Ł^2(\partial\Omega)$ est continue, alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$C \|w\|_{H^1(\Omega)} \geq \|w\|_{L^2(\Omega)} \geq \|w\|_{L^2(\Gamma_1)}.$$

Question 3 : Tout d'abord $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert. Ensuite, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont clairement respectivement bilinéaire et linéaire (nous travaillons dans $\mathbb{R}$ donc la bilinéarité inmplique sesquilinéairité et la linéarité, l'anti linéarité). Il nous faut démontrer leur continuité et la coercivité de $a(\cdot,\cdot)$. Nous noterons C la constante de continuité de l'opérateur trace $\gamma \colon H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$. Pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$:

$$\begin{array}{rll}
|\ell(v)| & = \left| \int_\Omega f(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_1} g(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x \right| & \\
& \leq \left| \int_\Omega f(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\Gamma_1} g(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x \right| & \text{Inégalité triangulaire} \\
& \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} & \text{Cauchy Schwarz} \\
& \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} & \text{car } \int_{\partial\Omega} |v(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq \int_{\Gamma_1} |v(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
& \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{H^1(\Omega)} & \text{Continuité de la trace} \\
& \leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C \|g\|_{L^2(\Gamma_1)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)} & \text{Donc } \ell \text{ est continue sur } H^1(\Omega) \\
|a(u,v)| & = \left| \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \eta \int_\Omega u(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x \right| & \\
& \leq \left| \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \eta \int_\Omega u(x)\, v(x)\,\mathrm{d}x \right| & \text{Inégalité triangulaire} \\
& \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^3} + \eta \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} & \text{Cauchy Schwarz} \\
& \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \eta \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} & \text{Inégalité des normes } L^2(\Omega) \text{ et } H^1(\Omega) \\
& \leq (1+\eta) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} & \text{Donc } a \text{ est continue sur } H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \\
a(u,u) & = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \eta \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x & \\
& \geq \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x & \text{Car } \eta > 1 \text{ et chaque terme est positif} \\
& \geq \|u\|^2_{H^1(\Omega)} & \text{Donc } a \text{ est coercive}
\end{array}$$

Toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont vérifiées : le problème admet une unique solution.

Question 4 :

```
h = 0.1;
Point(1) = {0,0,0,h};   Point(2) = {1,0,0,h};
Point(3) = {1,1,0,h};   Point(4) = {2,1,0,h};
Point(5) = {2,2,0,h};   Point(6) = {0,2,0,h};
Line(1) = {1,2};  Line(2) = {2,3};
Line(3) = {3,4};  Line(4) = {4,5};
Line(5) = {5,6};  Line(6) = {6,1};
Line Loop(1) = {1,2,3,4,5,6};
Plane Surface(1) = {1};
Physical Surface(1) = {1};
Physical Line(2) = {1,2,3,4,5}; //Gamma 0
Physical Line(3) = {6}; //Gamma 1
```

Question 5 : On définit l'espace des polynômes de degré 1 sur un domaine ω par :

$$\mathbb{P}^1(\omega) = \left\{ v \in \mathscr{C}^0(\omega) \text{ tel que } \exists a,b,c \in \mathbb{C}^3, \forall (x,y) \in \omega, v(x,y) = ax+by+c \right\}$$

et puis l'espace V_h (Attention, ne pas oublier la continuité sur $\overline{\Omega}$!)

$$V_h = \left\{ u \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \forall K \in \mathscr{T}_h, u|_K \in \mathbb{P}^1(K) \right\}$$

Question 6 : $V_h \subset H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert (cours). V_h dispose de la même norme que $H^1(\Omega)$ et de plus comme $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont continues sur respectivement $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, elles le sont toujours sur respectivement $V_h \times V_h$ et V_h. La coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ étant valable pour tout élément de $H^1(\Omega)$, elle le reste pour les éléments de V_h. Autrement dit, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ vérifient toujours les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sur V_h : le problème admet donc une unique solution.

Question 7 : T_1 et T_3 sont acceptables tandis que T_2 ne l'est pas : le sommet commun des triangles K_2 et K_3 n'est pas un sommet de K_4 tout en lui appartenant.

Question 8 : La dimension de V_h est égale au nombre nœuds de la triangulation : 6

Question 9 : Les fonctions φ_2, φ_4 et φ_5 sont nulles dans K_2. Pour les autres, nous notons :

$$\varphi_j|_{K_2}(x,y) = a_j x + b_j y + c.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_1(0,0) &=& 1\\ \varphi_1(1,1) &=& 0\\ \varphi_1(0,2) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} c_1 &=& 1\\ a_1+b_1+c_1 &=& 0\\ 2b_1+c_1 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_1 &=& -1/2\\ b_1 &=& -1/2\\ c_1 &=& 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_3(0,0) &=& 0\\ \varphi_3(1,1) &=& 1\\ \varphi_3(0,2) &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} c_3 &=& 0\\ a_3+b_3 &=& 1\\ 2b_3 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_3 &=& 1\\ b_3 &=& 0\\ c_3 &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \varphi_6(0,0) &=& 0\\ \varphi_6(1,1) &=& 0\\ \varphi_6(0,2) &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} c_6 &=& 0\\ a_6+b_6 &=& 0\\ 2b_6 &=& 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a_6 &=& -1/2\\ b_6 &=& 1/2\\ c_6 &=& 0 \end{array}\right.$$

Au final, nous obtenons pour tout (x,y) de K_2 :

$$\varphi_1(x,y) = -\frac{x+y}{2}+1, \quad \varphi_3(x,y) = x, \quad \varphi_6(x,y) = \frac{-x+y}{2}.$$

Exercice 3 – Deux petites formules

Question 1 : On a $(N-1)^2$ sous-carrés donc $N_t = 2(N-1)^2$ triangles. Comme $N^2 = N_s$, nous obtenons

$$N_t = 2N^2 - 4N + 2 = 2N_s - 4\sqrt{N_s} + 2.$$

Notez que $\sqrt{N_s}$ est un entier car $\sqrt{N_s} = (N-1)$. La formule se vérifie sur l'exemple de la Figure. Nous avons $8 \times 4 = 32$ triangles pour 25 sommets :

$$2 * 25 - 4 * \sqrt{25} + 2 = 50 - 20 + 2 = 32.$$

Quand N tend vers l'infini, N_t peut être approché par $2N_s$.

Question 2 : On a $N_s = N^3$ et $(N-1)^3$ cubes donc $N_t = 5(N-1)^3$ tétraèdres

$$N_t = 5(N^3 - 3N^2 + 3N - 1) = 5N_s - 15N_s^{2/3} + 15N_s^{1/3} - 5.$$

Chaque quantité $N_s^{2/3}$ et $N_s^{1/3}$ sont bien entières. Encore une fois, nous pouvons le vérifier sur le cas $N = 5$, avec $5^3 = 125$ sommets et $4^3 = 64$ sous-cubes. Cela donne $5 \times 64 = 320$ tétraèdres. Vérifions la formule

$$5N_s - 15N_s^{2/3} + 15N_s^{1/3} - 5 = 320.$$

Ce dernier calcul est plus facile qu'il n'y parait si on remarque que $N_s^{2/3} = N^2$ et $N_s^{1/3} = N$. Quand N tend vers l'infini, N_t peut être approché par $5N_s$.