Examen 2

Les objets électroniques (calculette, tablette, smartphone, etc.) doivent être rangés éteints dans les sacs durant lépreuve. Tout objet de ce type allumé pendant lépreuve sera saisi. Les documents papiers autres que les copies et le brouillon ne sont pas admis. L'usage de la couleur rouge est proscrit également. ***Tout résultat sera justifié avec soin et détail. Tout résultat parachuté sera considéré comme nul.***

3 exercices à résoudre en 2h

Exercice 1 – Du cours

Question 1 : Donnez la définition de $H^1(\Omega)$.

Question 2 : Énoncez (un des deux) Théorème(s) de l'inégalité de Poincaré.

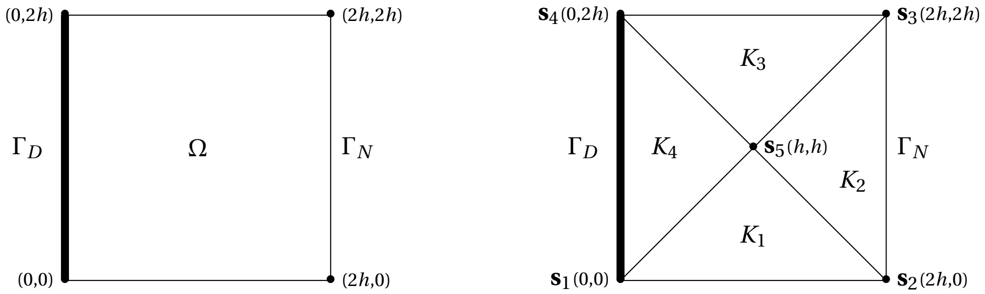
Question 3 : Pour un domaine polygonal Ω et une triangulation régulière $\mathscr{T}_h$ de Ω, donnez la définition de l'espace V_h^2 éléments finis $\mathbb{P}^2-$Lagrange sur $\mathscr{T}_h$, ainsi que sa dimension.

Exercice 2 – Résolution d'un problème

Dans cet exercice, on considère le domaine Ω décrit par la figure 1a. Son bord $\partial\Omega$ est décomposé en deux parties $\Gamma_D := \{(x,y) \in \partial\Omega \text{ tel que } x = 0\}$ (en gras sur la figure) et $\Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_D$ (="le reste"). Nous avons donc $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$. Soient les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\Omega)$ et $g \in \mathscr{C}^0(\Gamma_N)$. On considère le problème suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + u & = & f & (\Omega), \\ u & = & 0 & (\Gamma_D), \\ \partial_{\mathbf{n}} u & = & g & (\Gamma_N). \end{array}\right. \tag{1}$$

Nous supposons dans cet exercice que les fonctions u, f et g à valeurs réelles et $h > 0$ une constante.



(a) Domaine Ω de l'Exercice — (b) Triangulation $\mathscr{T}_h$

FIG. 1 : Domaine et son maillage

Question 1 : En précisant explicitement l'espace fonctionnel V et sa norme $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$, donnez la formulation variationnelle du problème (1) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v). \end{array}\right. \tag{2}$$

Question 2 : Démontrez que le problème (2) admet une unique solution. Justifiez soigneusement chaque ligne.

Question 3 : On souhaite résoudre le problème (2) à l'aide d'une méthode éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. Rappelez la définition de l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange basé sur une triangulation $\mathscr{T}_h$ (non encore précisée). Cet espace sera noté V_h.

Nous notons N_s le nombre de sommets de $\mathscr{T}_h$ et $(\Phi_J)_{J=1,\dots,N_s}$ les fonctions de forme de V_h, c'est à dire telle que $\Phi_J(\mathbf{s}_I) = \delta_{I,J}$ pour $I,J = 1,\dots,N_s$. Les indices globaux seront notés en majuscule ($I,J = 1,\dots,N_s$) tandis que les indices locaux le seront en minuscules ($i,j = 1,\dots,3$). Nous rapppelons que cette famille forme une base de V_h.

Question 4 : Démontrez que le problème ci-dessous admet une unique solution

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h). \end{array}\right. \tag{3}$$

Question 5 : Nous avons vu en cours que le problème (3) peut se réécrire sous la forme d'un système linéaire $AU = b$. Rappelez l'expression des coefficients de la matrice A et des vecteur U et b.

Question 6 : Rappelez l'algorithme d'assemblage de la matrice A en langage formel ainsi que sa complexité.

Question 7 : Dans le triangle de référence $\widehat{K}$ de sommet $\widehat{\mathbf{s}}_1(0,0)$, $\widehat{\mathbf{s}}_2(1,0)$ et $\widehat{\mathbf{s}}_3(0,1)$, nous notons $\widehat{\varphi}_j$ les fonctions $\mathbb{P}^1(\widehat{K})$ telles que $\widehat{\varphi}_j(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \delta_{i,j}$, pour $i,j = 1,2,3$. Nous noterons (ξ,η) les coordonnées paramétriques dans $\widehat{K}$.

1) Redonnez l'expression exacte des trois fonctions de forme $\widehat{\varphi}_1$, $\widehat{\varphi}_2$ et $\widehat{\varphi}_3$ ainsi que de leur gradient.
2) Calculez la valeur des trois intégrales suivantes pour $j = 1,2,3$: $\displaystyle\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_j(\xi,\eta)\,\mathrm{d}(\xi,\eta)$.
3) Calculez l'expression de la matrice de masse $\widehat{M}$ dans $\widehat{K}$, avec, pour $i,j = 1,2,3$:

$$\widehat{M}_{i,j} = \int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_j(\xi,\eta)\cdot\widehat{\varphi}_i(\xi,\eta)\,\mathrm{d}(\xi,\eta).$$

À partir de maintenant, nous utilisons la triangulation de la Figure 1b, que nous appelerons $\mathscr{T}_h$. Nous notons N_t le nombre de triangles. Pour $p = 1,\dots,N_t$, les sommets du triangle K_p sont renuméroté localement $\mathbf{s}_1^p$, $\mathbf{s}_2^p$ et $\mathbf{s}_3^p$ et les sommets sont orientés dans le sens trigonométrique (comme $\widehat{K}$). L'indice p n'est ici en aucun cas une puissance. Plus précisément, nous avons :

	$\mathbf{s}_1^p$	$\mathbf{s}_2^p$	$\mathbf{s}_3^p$
K_1	$\mathbf{s}_1$	$\mathbf{s}_2$	$\mathbf{s}_5$
K_2	$\mathbf{s}_2$	$\mathbf{s}_3$	$\mathbf{s}_5$

et

	$\mathbf{s}_1^p$	$\mathbf{s}_2^p$	$\mathbf{s}_3^p$
K_3	$\mathbf{s}_3$	$\mathbf{s}_4$	$\mathbf{s}_5$
K_4	$\mathbf{s}_4$	$\mathbf{s}_1$	$\mathbf{s}_5$

Nous notons de plus, pour $p = 1,\dots,N_t$, et $i = 1,2,3$ les fonctions $\varphi_i^p = \Phi_I|_{K_p}$ avec $\mathbf{s}_i^p = \mathbf{s}_I$. Autrement dit, la quantité I est l'indice globale associé à l'indice local i dans K_p. Les fonctions φ_i^p appartiennent donc à $\mathbb{P}^1(K_p)$ et sont telles que $\varphi_i^p(\mathbf{s}_j^p) = \delta_{i,j}$, pour $i,j = 1,2,3$.

Question 8 : Pour un triangle K_p, nous rappelons l'expression de T_p, la transformée linéaire qui permet de passer de $\widehat{K}$ à K_p :

$$\begin{array}{rccl} T_p : & \widehat{K} & \to & K_p \\ & (\xi,\eta) & \mapsto & (x,y) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{s}_i^p \widehat{\varphi}_i(\xi,\eta). \end{array}$$

1) Pour un triangle quelconque K_p, donnez l'expression de la matrice Jacobienne J_p de T_p en fonction des coordonnées des sommets $\mathbf{s}_i^p = (x_i^p, y_i^p)$.

Rappel : $(J_p)_{1,1} = \partial x / \partial \xi$, $(J_p)_{1,2} = \partial x / \partial \eta, \dots$

2) En déduire les 4 matrices jacobiennes J_p pour les triangles K_p avec $p = 1, 2, 3, 4$.

3) En déduire les 4 déterminants $\det(J_p)$ pour $p = 1, 2, 3, 4$.

Question 9 : Calculez les 4 matrices de masse élémentaires M_p^e pour $p = 1, 2, 3, 4$, dont on rappelle l'expression

$$\forall p = 1, \dots, 4, \forall i, j = 1, 2, 3, \qquad M_p^e(i, j) = \int_{K_p} \varphi_j^p(x, y) \varphi_i^p(x, y) \, \mathrm{d}(x, y).$$

Question 10 : Montrez que la matrice de rigidité élémentaire D_1^e du triangle K_1 est indépendante de h et est donnée par :

$$D_1^e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Question 11 : Sachant que les 4 matrices de rigité élémentaires sont identiques, calculez explicitement la matrice A, avant traitement de la condition de Dirichlet. Autrement dit, calculez chaque coefficient de la matrice.

Question 12 : Supposons que $f = 3$ et $g = 0$ (fonctions constantes). Donnez l'expression explicite (numérique) de chaque coefficient de b avant traitement de la condition de Dirichlet.

Question 13 : Intégrez la condition de Dirichlet dans le système linéaire que vous avez obtenu.

Exercice 3 – Éléments Finis sur un Quadrangle

Considérons le quadrilatère de référence $\widehat{R}$ de sommets $\mathbf{s}_1(-1, -1)$, $\mathbf{s}_2(1, -1)$, $\mathbf{s}_3(1, 1)$ et $\mathbf{s}_4(-1, 1)$. Nous introduisons l'espace suivant :

$$\mathbb{Q}^1(\widehat{R}) = \left\{ u|_{\widehat{R}} \,\middle|\, \exists!(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4, \forall (\xi, \eta) \in \widehat{R}, \quad u(\xi, \eta) = a\xi\eta + b\xi + c\eta + d \right\}.$$

Question 1 : Quel est la dimension de $\mathbb{Q}^1(\widehat{R})$ (avec une petite justification svp) ?

Question 2 : Montrez qu'une fonction de $\mathbb{Q}^1(\widehat{R})$ est caractérisée par ses valeurs aux quatre sommets. Autrement dit, montrez que, pour un jeu de données $(\alpha_i)_{1 \le i \le 4} \in \mathbb{C}$, il existe un unique polynôme q de $\mathbb{Q}^1(\widehat{R})$ tel que $q(\mathbf{s}_i) = \alpha_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

Question 3 : Soient $(\phi_j)_{1 \le j \le 4}$ quatre fonctions de $\mathbb{Q}^1(\widehat{R})$ telles que $\phi_j(\mathbf{s}_i) = \delta_{i,j}$ pour $i = 1, \dots, 4$ (nous savons qu'elles existent d'après la question précédente). Donnez l'expression explicite de chaque fonction ϕ_j.

Question 4 : Montrez que la famille $(\phi_j)_{1 \le j \le 4}$ forme une base de $\mathbb{Q}^1(\widehat{R})$.

Fin de l'énoncé

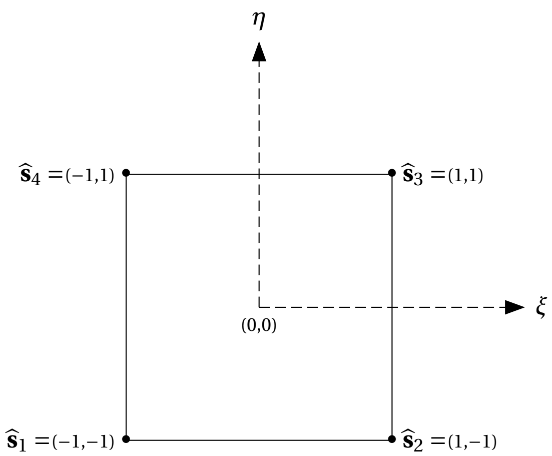


FIG. 2 : Quad de référence