Examen 2 – correction

Exercice 1 – Du cours

Question 1 :

$$H^1(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) \text{ tel que } \nabla u \in (L^2(\Omega))^3\right\}$$

Question 2 : Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^d$, $d = 2,3$, nous avons alors

$$\exists C > 0 | \forall u \in H^1_0(\Omega), \quad \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq C \, \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Question 3 : On peut définir V_h en deux temps. Pour tout ouvert ω de $\mathbb{R}^2$, on définit

$$\mathbb{P}^2(\omega) = \left\{p|_{\omega}, p \in \mathbb{C}[X] \;\middle|\; \exists a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C} \;\middle|\; \forall (x,y) \in \omega, p(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f\right\},$$

et puis

$$V_h^2 = \left\{u \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \;\middle|\; \forall K \in \mathscr{T}_h, u|_K \in \mathbb{P}^2(K)\right\}.$$

La dimension de V_h^2 est égale au nombre de sommets additionnée du nombre d'arrêtes de $\mathscr{T}_h$.

Exercice 2 – Formulation faible

Question 1 : Sans nous préoccuper de la régularité, nous multiplions l'EDP par une fonction test v qui est nulle sur Γ_D, comme u. Nous intégrons ensuite sur Ω et nous obtenons :

$$\begin{array}{ll}
\int_\Omega -\Delta u v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega u v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} & \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} & \text{Formule de Green} \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Gamma_D} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Gamma_N} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} & \partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \\
\qquad = \int_\Omega f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} & \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\Gamma_N} \partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} & (v)|_{\Gamma_D} = 0 \text{ et } (\partial_{\mathbf{n}} u)|_{\Gamma_N} = g \\
\implies \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\Gamma_N} g(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \,\mathrm{d}\mathbf{x} & \text{Regroupement des termes}
\end{array}$$

Travailler dans $H^1(\Omega)$ est suffisant en terme de régularité, mais nous devons incorporer la condition de Dirichlet. Nous introduisons donc l'espace suivant (attention, notation non standard !)

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) \;\middle|\; \gamma_D u = 0\right\},$$

où la fonction $\gamma_D : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma_D)$ est l'application trace sur Γ_D. Nous avons vu dans le cours que cette application existe et est continue. Au final, nous obtenons les formes a et ℓ, pour tout $u, v \in V = H^1(\Omega)$:

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) \,\mathrm{d}x + \int_\Omega u(x) v(x) \,\mathrm{d}x, \quad \ell(v) = \int_\Omega f(x) v(x) \,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} g(x) v(x) \,\mathrm{d}x.$$

La norme dans $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ est la même que dans $H^1(\Omega)$, vu dans le premier exercice.

Question 2 : Tout d'abord $H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Ensuite, $a(\cdot\,,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont clairement respectivement bilinéaire et linéaire (nous travaillons dans $\mathbb{R}$ donc la bilinéarité inmplique sesquilinéairité et la linéarité, l'anti linéarité). Il nous faut démontrer leur continuité et la coercivité de $a(\cdot\,,\cdot)$. Nous noterons C_N la constante de continuité de l'opérateur trace γ_N de $H^1(\Omega)$ sur $L^2(\Gamma_N)$:

$$\exists C_N > 0 / \forall v \in H^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Gamma_N)} \leq C_N \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'autre part, nous noterons C_p la constante de l'inégalité de Poincaré :

$$\forall v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega), \quad \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \geq C_p \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Nous rappelons enfin l'inégalité suivante

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \implies \left\{ \begin{array}{lcl} \|v\|_{H^1(\Omega)} & \geq & \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|v\|_{H^1(\Omega)} & \geq & \|v\|_{L^2(\Omega)}. \end{array} \right.$$

Pour tout $u, v \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
|\ell(v)| &= \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\Gamma_N} g(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \left| \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\Gamma_N} g(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| && \text{Inégalité triangulaire} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{L^2(\Gamma_N)} && \text{Cauchy Schwarz} \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{L^2(\partial\Omega)} && \text{car } \int_{\partial\Omega} |v(x)|^2\,\mathrm{d}x \geq \int_{\Gamma_N} |v(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + C_N \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Continuité de la trace} \\
&\leq \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_N \|g\|_{L^2(\Gamma_N)} \right) \|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Donc } \ell \text{ est continue sur } H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \\
|a(u,v)| &= \left| \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u(x)v(x)\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} && \text{Cauchy Schwarz} \\
& && \text{Donc } a \text{ est continue sur } H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \\
a(u,u) &= \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |u(x)|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \\
& && \text{Donc } a \text{ est coercive sur } H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_D}(\Omega)
\end{aligned}$$

Toutes les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont vérifiées : le problème admet une unique solution.

Question 3 : On définit l'espace des polynômes de degré 1 sur un domaine ω de $\mathbb{R}^2$ par :

$$\mathbb{P}^1(\omega) = \left\{ v \in \mathscr{C}^0(\omega) \text{ tel que } \exists a,b,c \in \mathbb{C}^3, \forall (x,y) \in \omega, v(x,y) = ax + by + c \right\}$$

et puis l'espace V_h (Attention, ne pas oublier la continuité sur $\overline{\Omega}$!)

$$V_h = \left\{ u \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ tel que } \forall K \in \mathscr{T}_h, u|_K \in \mathbb{P}^1(K) \right\}$$

Question 4 : $V_h \subset H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert (cours). V_h dispose de la même norme que $H^1(\Omega)$ et de plus comme $a(\cdot\,,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont continues sur respectivement $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$, elles le sont toujours sur respectivement $V_h \times V_h$ et V_h. La coercivité de $a(\cdot,\cdot)$ étant valable pour tout élément de $H^1(\Omega)$, elle le reste pour les éléments de V_h. Autrement dit, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ vérifient toujours les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sur V_h : le problème admet donc une unique solution.

Question 5 : Comme $(\Phi_J)_J$ est une base de V_h, nous avons :

$$\exists u_1, u_2, \dots, u_{N_S} \in \mathbb{C} | u_h = \sum_{J=1}^{N_s} u_J \Phi_J,$$

si u_h est la solution de la formulation faible dans V_h. De plus nous savons que $u_J = u_h(\mathbf{s}_J)$ pour tout J. D'autre part, la formulation faible en V_h nous donne :

$$\forall v_h \in V_h, \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h).$$

Celle-ci se réécrit de manière équivalente :

$$\forall I = 1, \dots, N_s, \qquad a(u_h, \Phi_I) = \ell(\Phi_I).$$

Nous injectons l'expression de u_h dedans pour obtenir :

$$\forall I = 1, \dots, N_s, \qquad \sum_{J=1}^{N_S} a(\Phi_J, \Phi_I) u_h(\mathbf{s}_J) = \ell(\Phi_I) \iff AU = b,$$

avec $A = (A_{I,J})_{1 \le I,J \le N_s}$, $U = (u_h(\mathbf{s}_J))_{1 \le J \le N_s}$, et $b = (b_I)_{1 \le I \le N_s}$, et

$$\forall J, I = 1, \dots, N_s, \qquad A_{I,J} = a(\Phi_J, \Phi_I), \qquad u_I = u_h(\mathbf{s}_I), \qquad b_I = \ell(\Phi_I).$$

Question 6 : Voir cours pour l'algorithme

Question 7 : 1) Nous avons

$$\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) = \xi, \quad \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) = \eta,$$

$$\nabla\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla\widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla\widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2) Commençons par $\widehat{\varphi}_2$:

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) \mathrm{d}(\xi,\eta) &= \int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\xi=0}^{\xi=1} \xi(1-\xi) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi = \left[\xi^2/2 - \xi^3/3\right]_{\xi=0}^{\xi=1} = 1/2 - 1/3 = 1/6.\end{aligned}$$

Et puis $\widehat{\varphi}_3$, même si c'est la même chose :

$$\begin{aligned}\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) \mathrm{d}(\xi,\eta) &= \int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi = \int_{\xi=0}^{\xi=1} \int_{\eta=0}^{\eta=1-\xi} \eta \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{2} \int_{\xi=0}^{\xi=1} (1-\xi)^2 \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\xi = 1/2 \left[\xi - \xi^2 + \xi^3/3\right]_{\xi=0}^{\xi=1} = \frac{1}{2}\frac{1}{3} = 1/6\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) \mathrm{d}(\xi,\eta) = \int_{\widehat{K}} 1 \mathrm{d}(\xi,\eta) - \int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) \mathrm{d}(\xi,\eta) - \int_{\widehat{K}} \widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) \mathrm{d}(\xi,\eta) = 1/2 - 1/6 - 1/6 = 1/6,$$

car $\int_{\widehat{K}} 1 \, \mathrm{d}(\xi,\eta) = 1/2$ (aire du triangle).

3) La matrice est clairement symétrique, nous ne calculons donc pas tous les termes. En bref :

$$\widehat{M} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Question 8 : 1) Nous avons

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & x_1^{K_p}\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) + x_2^{K_p}\widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) + x_3^{K_p}\widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) \\ y & = & y_1^{K_p}\widehat{\varphi}_1(\xi,\eta) + y_2^{K_p}\widehat{\varphi}_2(\xi,\eta) + y_3^{K_p}\widehat{\varphi}_3(\xi,\eta) \end{array}\right.$$

En remplaçant les $\widehat{\varphi}_i(\xi,\eta)$ par leur valeur, nous obtenons facilement la matrice Jacobienne :

$$J_p = \begin{pmatrix} x_2^{K_p} - x_1^{K_p} & x_3^{K_p} - x_1^{K_p} \\ y_2^{K_p} - y_1^{K_p} & y_3^{K_p} - y_1^{K_p} \end{pmatrix}.$$

2) Après calculs :

$$J_1 = h\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2 = h\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_3 = h\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_4 = h\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Après calculs :

$$\det(J_p) = 2h^2, p = 1,2,3,4.$$

Question 9 : Les 4 matrices sont identiques car les triangles sont tous identiques à une rotation près (pas de "retournement" ni d'homothétie). On utilise un changement de variable pour obtenir que

$$M_p^e = \det(J_p)\widehat{M}^e = 2h^2\widehat{M}^e.$$

Question 10 : Nous rappelons que nous avons : $B_{K_1} = (J_k^T)^{-1}$:

$$\nabla\phi_i^1 = B_{K_1}\nabla p\hat{h}i_i$$

Soit donc, après calcul :

$$B_K = \frac{h}{2h^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_e^1(i,j) &= \int_{K_1} (\nabla\phi_j)^T(\nabla\phi_i)\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\ &= \det(J_{K_1})\int_{\hat{K}} (B_{K_1}\nabla\hat{\phi}_j)^T(B_{K_1}\nabla\hat{\phi}_i)\,\mathrm{d}(\xi,\eta) \\ &= \det(J_{K_1})\int_{\hat{K}} (\nabla\hat{\phi}_j)^T B_{K_1}^T(B_{K_1}\nabla\hat{\phi}_i)\,\mathrm{d}(\xi,\eta) \end{aligned}$$

Les termes dans l'intégrales ne dépendent pas de (ξ,η) et peuvent être sortis de celle-ci :

$$\begin{aligned} D_e^1(i,j) &= \det(J_{K_1})(\nabla\hat{\phi}_j)^T B_{K_1}^T(B_{K_1}\nabla\hat{\phi}_i)\int_{\hat{K}} 1\,\mathrm{d}(\xi,\eta) \\ &= \frac{2h^2}{2}(\nabla\hat{\phi}_j)^T B_{K_1}^T(B_{K_1}\nabla\hat{\phi}_i) \\ &= h^2(\nabla\hat{\phi}_j)^T B_{K_1}^T(B_{K_1}\nabla\hat{\phi}_i) \end{aligned}$$

Nous calculons $B_{K_1}^T B_{K_1}$ pour obtenir :

$$B_{K_1}^T (B_{K_1} = \frac{1}{2h^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On obtient alors :

$$D_e^1(i,j) = \frac{h^2}{2h^2}(\nabla\hat{\phi}_j)^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \nabla\hat{\phi}_i) = \frac{1}{2}(\nabla\hat{\phi}_j)^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \nabla\hat{\phi}_i)$$

Nous sommes ici en mesure de dire que D_1^e ne dépend pas de h. Ensuite, on calcule chaque terme (sachant que la matrice es symétrique et il est astucieux de regrouper certains calculs) :

$$\begin{aligned}
D_1^e(1,1) &= \frac{1}{2}(-1,-1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}(-1,-1)^T = \frac{1}{2}(0,-1)(-1,-1)^T = \frac{1}{2} \\
D_1^e(1,2) &= \frac{1}{2}(0,-1)(1,0)^T = 0 \\
D_1^e(1,3) &= \frac{1}{2}(0,-1)(0,1)^T = -\frac{1}{2} \\
D_1^e(2,2) &= \frac{1}{2}(1,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}(1,0)^T = \frac{1}{2}(1,-1)(1,0)^T = \frac{1}{2} \\
D_1^e(2,3) &= \frac{1}{2}(1,-1)(0,1)^T = -\frac{1}{2} \\
D_1^e(3,3) &= \frac{1}{2}(0,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}(0,1)^T = \frac{1}{2}(-1,2)(0,1)^T = 1
\end{aligned}$$

Question 11 : Nous connaissons chaque matrice de masse et de rigidité :

$$M_p^e = \frac{h^2}{12}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D_p^e = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nous devons maintenant assembler la matrice globale. Nous pouvons remarquer que, du fait de la symétrie du problème, nous avons :

- Les coefficients diagonaux des 4 sommets du bord sont égaux : $A(1,1) = A(2,2) = A(3,3) = A(4,4)$
- Les interactions entre le sommet du milieu et un autre du bord seront identiques entre elles : $A(5,1) = A(5,2) = A(5,3) = A(5,4)$
- Enfin, même raisonnement pour les éléments du bord :$A(1,2) = A(1,4) = A(2,3) = A(3,4)$
- $A(1,3) = A(2,4) = 0$
- N'oublions pas, enfin, la symétrie de la matrice A

Au final, nous n'avons que 3 coefficients différents à calculer. Tout d'abord les coefficients diagonaux :

$$A(1,1) = (M_1^e(1,1) + M_4^e(2,2)) + (D_1^e(1,1) + D_4^e(2,2)) = \frac{2h^2 + 2h^2}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{h^2}{3} + 1$$

$$A(5,5) = \sum_{p=1}^{4}(M^e_p(3,3) + D^e_p(3,3)) = 4\frac{h^2}{6} + 4 = 4\left(\frac{h^2}{6}+1\right)$$

Ensuite la 5^e colonne :

$$A(5,1) = A(1,5) = M^e_1(1,3) + D^e_1(1,3) + M^e_4(2,3) + D^e_4(2,3) = \frac{h^2}{6} - 1$$

Enfin les interactions entre les sommets du bord. On peut remarquer que la partie “rigidité” sera toujours nulle !

$$A(1,2) = M^e_1(1,2) + D^e_1(1,2) = \frac{h^2}{12}.$$

Nous obtenons alors

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h^2}{3}+1 & \frac{h^2}{12} & 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{6}-1 \\ \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{3}+1 & \frac{h^2}{12} & 0 & \frac{h^2}{6}-1 \\ 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{3}+1 & \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{6}-1 \\ \frac{h^2}{12} & 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{3}+1 & \frac{h^2}{6}-1 \\ \frac{h^2}{6}-1 & \frac{h^2}{6}-1 & \frac{h^2}{6}-1 & \frac{h^2}{6}-1 & 4\left(\frac{h^2}{6}+1\right) \end{pmatrix}$$

Question 12 : Si $f = 3$ et $g = 0$ alors

$$b_I = 3\int_\Omega \phi_I(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = 3\sum_{p=1}^{N_t}\int_{K_p}\phi_I(x,y)\,\mathrm{d}(x,y).$$

À I fixé, les termes de la somme sont nuls si $\mathbf{s}_I$ n’est pas un sommet du triangle K_p. Par ailleurs, on a vu que, peu importe le sommet du triangle, l’intégrale $\int_{\widehat{K}}\widehat{\varphi}_i = 1/6$ (pour $i = 1,2,3$), nous avons donc, par changement de variable dans le triangle de référence :

$$\forall p = 1,\dots,N_t, \qquad \int_{K_p}\Phi_I(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{\left|\det(J^{K_p})\right|}{6} = \frac{2h^2}{6} = \frac{h^2}{3}.$$

Nous obtenons donc :

$$b_I = 3\sum_{K_p\in\mathscr{T}_h \text{ tel que } \mathbf{s}_I \text{ est un sommet de } K_p}\int_{K_p}\Phi_I(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = h^2 N_I$$

où N_I est le nombre de triangles ayant $\mathbf{s}_I$ comme sommet (soit 2 pour les 4 premiers sommets et 4 pour le 5^e sommet). Nous faisons les comptes et obtenons

$$b = h^2\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix}^T$$

Question 13 : La condition de Dirichlet s’applique sur le segment reliant le $\mathbf{s}_1$ à $\mathbf{s}_4$. Le système modifié devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{3}+1 & \frac{h^2}{12} & 0 & \frac{h^2}{6}-1 \\ 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{3}+1 & \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{6}-1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{h^2}{6}-1 & \frac{h^2}{6}-1 & \frac{h^2}{6}-1 & \frac{h^2}{6}-1 & 4\left(\frac{h^2}{6}+1\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = h^2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons aussi, comme la condition est homogène, rendre les “colonnes de Dirichlet” à 0 et ainsi réduire la taille du système à résoudre :

$$\begin{pmatrix} \frac{h^2}{3}+1 & \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{6}-1 \\ \frac{h^2}{12} & \frac{h^2}{3}+1 & \frac{h^2}{6}-1 \\ \frac{h^2}{6}-1 & \frac{h^2}{6}-1 & 4\left(\frac{h^2}{6}+1\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_5 \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

avec $U_1 = U_4 = 0$.

Exercice 3 – Quadrangle

Question 1 : La dimension est 4 car le quadrangle considéré n'est pas dégénéré et le polynôme nécessite quatre paramètres (nous savons aussi que les polynômes ξ, η et $\xi\eta$ sont linéairement indépendants)

Question 2 : Prenons un polynôme $q(\xi,\eta) = a\xi\eta + b\xi + c\eta + d$ tels que $q(\mathbf{s}_i) = \alpha_i$ et tentons d'obtenir ses coefficients. Nous aboutissons sur le système linéaire suivant, et la question est : "admet-il une unique solution ?" :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous intéresse est le déterminant de la matrice. Pour cela, nous effectuons des opérations élémentaires entre les lignes. Tout d'abord $L2 := L2 + L1$, $L3 := L3 + L4$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ensuite nous effectuons $L4 = L4 + L1$ et $L3 = L3 + L2$:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Puis nous permuttons $L2$ et $L4$, puis $L3$ et (la nouvelle) $L4$, soit deux permutations (le déterminant ne change pas de signe, même si cela ne nous intéresse pas). Nous aboutissons au calcul dun déterminant d'une matrice triangulaire qui vaut le produit des éléments diagonaux :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16 \neq 0.$$

Le système admet donc une unique solution, le polynôme q est donc unique. **Question 3 :** Nous utilisons la méthode "traditionnelle" :

$$\phi_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad \phi_2(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$\phi_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad \phi_4(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

Question 4 : Il suffit de montrer que la famille est libre en prenant quatre constantes α_i telles que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\alpha_i\phi_i = 0 &\implies \forall(\xi,\eta)\in\hat{R},\quad \sum_{i=1}^{4}\alpha_i\phi_i(\xi,\eta)=0\\ &\implies \forall j=1,2,3,4,\quad \sum_{i=1}^{4}\alpha_i\underbrace{\phi_i(\mathbf{s}_j)}_{=\delta_{ij}}=0\\ &\implies \forall j=1,2,3,4,\quad \alpha_j=0\end{aligned}$$