Examen 1

Les objets électroniques (calculette, tablette, smartphone, etc.) doivent être rangés éteints dans les sacs durant l'épreuve. Tout objet de ce type allumé pendant l'épreuve sera saisi. Les documents papiers autres que les copies et le brouillon ne sont pas admis. L'usage de la couleur rouge est proscrit également. Tout résultat sera justifié avec soin et détail.

4 exercices à résoudre en 2h

Exercice 1 – Du cours

Question 1 : Énoncez le Théorème de Lax-Milgram.

Question 2 : Donnez la définition mathématique de la dérivée faible.

Question 3 : Énoncez la Formule de Green pour un ouvert Ω de classe $\mathscr{C}^1$ et $u \in \mathscr{C}^1(\overline{\Omega})$.

Question 4 : Soit f une fonction continue sur Ω, un ouvert borné régulier de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$. (Redé-)montrez que, si pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega f(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{y})\,\mathrm{d}\mathbf{y} = 0,$$

alors f est identiquement nulle dans Ω.

Exercice 2 – De l'énergie

Nous supposons ici que nous disposons de la formulation faible suivante, où toutes les valeurs sont réelles :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u \in V \text{ tel que}\\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v),\end{array}\right. \tag{1}$$

avec $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ et $\ell(\cdot) : V \to \mathbb{R}$. Soit $J : V \to \mathbb{R}$ la fonctionnelle définie par :

$$\forall v \in V, \qquad J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - \ell(v).$$

Nous nous plaçons sous les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram et sous l'hypothèse que $a(\cdot,\cdot)$ est symétrique : $a(v,w) = a(w,v)$.

Question 1 : Montrez que si u est la solution de (1) alors u minimise la fonctionnelle J, c'est à dire que

$$J(u) = \min_{v\in V} J(v).$$

Aucune idée pour démarrer ? À v fixé, introduisez $w = u + v$ et regardez $J(u+w)$.

Exercice 3 – Formulation faible

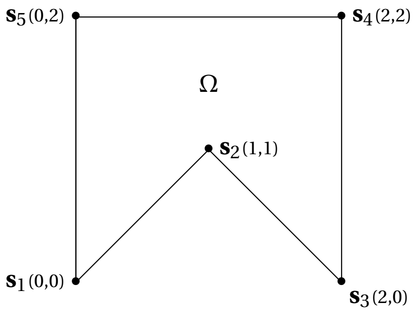


FIG. 1 : Domaine Ω de l'Exercice

Dans cet exercice, on considère le domaine Ω décrit par la figure 1. Soit la fonction $f \in L^2(\Omega)$ et la quantité $\eta > 1$. On considère le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\eta\Delta u + u & = & f & (\Omega), \\ \partial_{\mathbf{n}} u & = & 0 & (\partial\Omega). \end{array}\right. \tag{2}$$

Nous supposons dans cet exercice que les fonctions u et f à valeurs réelles.

Question 1 : En précisant explicitement l'espace fonctionnel V et sa norme $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$, donnez la formulation variationnelle du problème (2) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v). \end{array}\right. \tag{3}$$

Question 2 : Démontrez que le problème (3) admet une unique solution.

Question 3 : Écrivez un code en language GMSH qui permettrait d'obtenir la géométrie désirée (c'est-à-dire Ω). Nous précisons et rappelons que :

- Pour séparer Γ_0 et Γ_1 dans le fichier de maillage, il faut pour cela définir deux *`Physical Line`*. Rassurez-vous : la note de l'examen ne prend pas en compte la présence ou l'absence de *`Physical`* dans votre code
- Nous rappelons quelques syntaxes propre à GMSH :
  - `Point(i)= {x, y, z, h};`
  - `Line(i)= {point1, point2};`
  - `Line Loop(i)= {line1, line2, ..., lineN};`
  - `Plane Surface(i)= {lineloop1, lineloop2, ..., lineloopN};`

Question 4 : On souhaite résoudre le problème (3) à l'aide d'une méthode éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. Rappelez la définition de l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange basé sur une triangulation $\mathscr{T}_h$ (non encore précisée). Cet espace sera noté V_h.

Question 5 : Démontrez que le problème ci-dessous admet une unique solution

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ \forall v_h \in V_h, \quad a(u_h,v_h) = \ell(v_h). \end{array}\right.$$

Question 6 : Trois triangulations nous sont présentées sur la Figure 2. Avec justification, dites pour chacune d'elle si elle est, oui ou non, acceptable pour la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$.

Question 7 : À partir de maintenant, nous utilisons la triangulation de la Figure 3, que nous appelerons $\mathscr{T}_h$. Quelle est alors la dimension de V_h ?

Question 8 : Nous notons φ_j les fonctions de V_h telles que $\varphi_j(\mathbf{s}_j) = 1$ et $\varphi_j(\mathbf{s}_i) = 0$ si $i \neq j$. Calculez l'expression explicite des 6 fonctions φ_j, $j = 1,\ldots,6$, sur le triangle K_2.

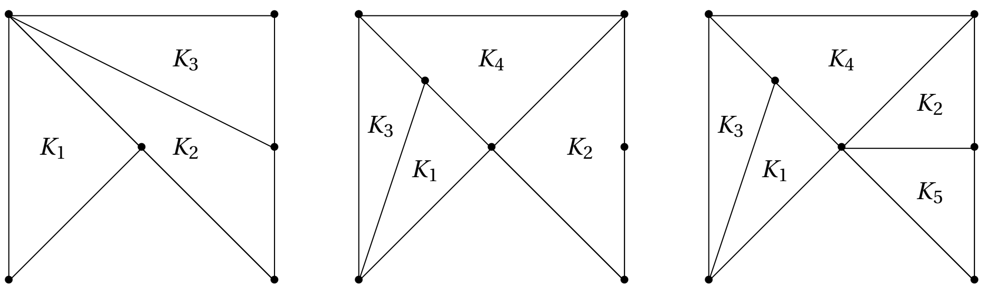
Exercice 4 – To be in $H^1(I)$ or not to be

Question 1 : Soit la fonction f définie sur $I =]-1,1[$ par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

f appartient-elle à $H^1(I)$? Si oui donnez sa définition.

Question 2 : Soit f une fonction continue sur $\overline{I}$ et telle que $f \in \mathscr{C}^1([-1,0[) \cap \mathscr{C}^1(]0,1])$. De plus, f' admet une limite finie en 0 à droite à gauche. Montrez que $f \in H^1(I)$.



(a) $T_{h,1}$ (b) $T_{h,2}$ (c) $T_{h,3}$

FIG. 2 : Triangulations de Ω

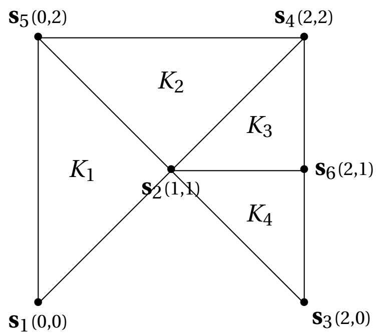


FIG. 3 : Triangulation $\mathscr{T}_h$