Examen 1

4 exercices à résoudre en 2h

Exercice 1 – Du cours

Voir cours

Exercice 2 – De l'énergie

Question 1 : Nous avons :

$$\begin{aligned}
J(v) = J(u+w) &= \frac{1}{2}a(u+w,u+w) - \ell(u+w)\\
&= \frac{1}{2}a(u,u) + \frac{1}{2}a(u,w) + \frac{1}{2}a(w,u) + \frac{1}{2}a(w,w) - \ell(u) - \ell(w)\\
&= \frac{1}{2}a(u,u) - \ell(u) + \frac{1}{2}a(w,w) - \ell(w) + \frac{1}{2}\left(a(u,w) + a(w,u)\right)\\
&= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) - \ell(w) + \frac{1}{2}\left(a(u,w) + a(u,w)\right)\\
&= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w) - \ell(w) + a(u,w)\\
&= J(u) + \frac{1}{2}a(w,w)\\
&\geq J(u)
\end{aligned}$$

Question 2 : Soient $v \in V$ et $j(t) = J(u+tv)$, comme u minimise J, nous avons :

$$j(t) = J(u+tv) = J(u) + \frac{t^2}{2}a(v,v) + t\left[a(u,v) - \ell(v)\right].$$

Comme $t=0$ est un minimum de j, on en déduit que $j'(t=0)=0$, d'où, comme v est arbitraire

$$\forall v \in V, \qquad a(u,v) - \ell(v) = 0.$$

Exercice 3 – Formulation faible

Dans cet exercice, on considère le domaine Ω décrit par la figure 1. Soit la fonction $f \in L^2(\Omega)$ et la quantité $\eta > 1$. On considère le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\eta\Delta u + u &=& f & (\Omega),\\ \partial_{\mathbf{n}} u &=& 0 & (\partial\Omega). \end{array}\right. \tag{1}$$

Nous supposons dans cet exercice que les fonctions u et f à valeurs réelles.

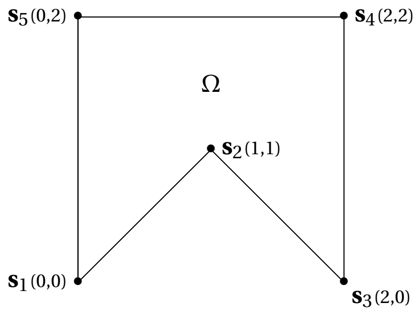


FIG. 1 : Domaine Ω de l'Exercice

Question 1 : Sans nous soucier de la régularité des fonctions, multiplions l'EDP par une fonction test v et intégrons sur Ω :

$$-\eta\int_\Omega \Delta u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x}).$$

Après intégration par partie, on obtient

$$\eta\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} = \int_\Omega f(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x}) - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\partial_{\mathbf{n}} u(\mathbf{x})}_{=0}\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Comme u et v ne sont dérivées qu'une seule fois, nous choisissons $V = H^1(\Omega)$ et la formulation faible s'écrit alors

$$\begin{cases}\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que}\\ \forall v \in H^1(\Omega), a(u,v) = \ell(v),\end{cases}$$

avec $a(\cdot,\cdot)\colon H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ et $\ell\colon H^1(\Omega)\to\mathbb{R}$ et définies par :

$$\begin{cases} a(u,v) = \eta\displaystyle\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\\ \ell(v) = \displaystyle\int_\Omega f(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x}),\end{cases}$$

Le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{H^1(\Omega)}$ sur $H^1(\Omega)$ et sa norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ considérés sont donnés par

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \qquad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \left|\int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right|^{1/2}$$

Question 2 : $V = H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert et $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$ sont des formes linéaires respectivement sur $H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$. De plus, nous avons :

- $\ell(\cdot)$ est continue ?

$$\begin{aligned} |\ell(v)| &= \left|\int_\Omega f(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathrm{d}\mathbf{x}\right| && (2)\\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} && (3)\\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)} && (4)\\ & && (5)\end{aligned}$$

- $a(\cdot,\cdot)$ est continue ?

$$
\begin{aligned}
|a(u,v)| &= \left|\eta\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathbf{dx} + \int_\Omega u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}\right| && (6)\\
&\leq \eta\left|\int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})\cdot\nabla v(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}\right| + \left|\int_\Omega u(\mathbf{x})\,v(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}\right| && (7)\\
&\leq \eta\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} && (8)\\
&\leq \eta\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)} && (9)\\
&\leq (\eta+1)\,\|u\|_{H^1(\Omega)}\,\|v\|_{H^1(\Omega)} && (10)
\end{aligned}
$$

- $a(\cdot,\cdot)$ est coercive ? Comme $\eta > 1$:

$$
\begin{aligned}
a(u,u) &= \eta\int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2\,\mathbf{dx} + \int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2\,\mathbf{dx} && (11)\\
&\geq \int_\Omega \|\nabla u(\mathbf{x})\|^2\,\mathbf{dx} + \int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2\,\mathbf{dx} && (12)\\
&\geq \|u\|^2_{H^1(\Omega)} && (13)
\end{aligned}
$$

Les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont vérifiées, la solution variationnelle admet une unique solution.

Question 3 : Simple

Question 4 : $V_h = \left\{ v \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \;\middle|\; v|_T \in \mathbb{P}^1(T) \text{ pour tout triangle } T \right\}$.

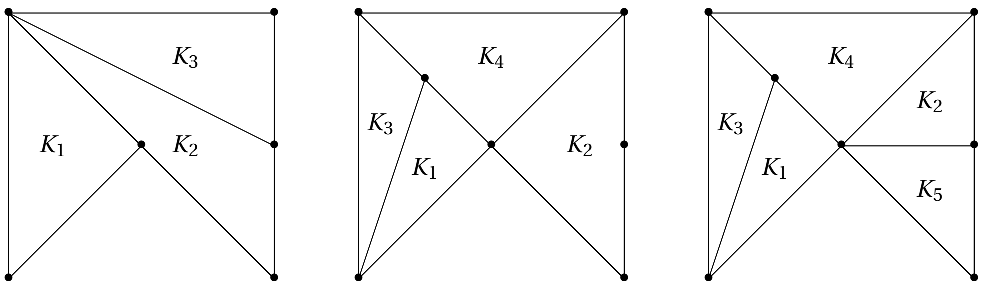
Question 5 : Nous avon $V_h \subset H^1(\Omega)$ et que V_h est un espace de Hilbert. De plus, les hypothèses du Théorème de Lax-Milgram sont toujours vérifiées donc le problème admet une unique solution.

Question 6 : Aucune n'est acceptable

Question 7 : $\dim(V_h) = 6$

Question 8 : Calculs simples

Exercice 4 – To be in $H^1(I)$ or not to be



(a) $T_{h,1}$ (b) $T_{h,2}$ (c) $T_{h,3}$

FIG. 2 : Triangulations de Ω

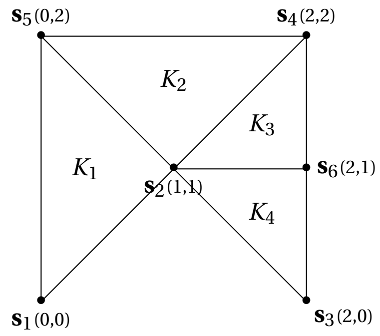


FIG. 3 : Triangulation $\mathscr{T}_h$

Question 1 : Soit la fonction f définie sur $I =]-1,1[$ par

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$$

f est continue sur $\overline{I}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$. Nous avons même

$$\forall x \in I, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

et sa dérivée est continue par morceau :

$$\begin{cases} \forall x \in]-1,0[, & f'(x) = 0, \\ \forall x \in]0,1[, & f'(x) = 1, \end{cases}$$

En 0, f' admet une limite finie à gauche (0) et à droite (1). Nous avons donc, pour toute fonction φ de $\mathscr{C}_c^\infty(I)$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

$$= -\int_{-1}^{0} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + [f(x)\varphi(x)]_{-1}^{0} \int_{0}^{1} f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + [f(x)\varphi(x)]_{0}^{1} \tag{15}$$

$$= f(0^-)\varphi(0^-) - f(0^+)\varphi(0^+) - \int_{0}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

Comme f et φ sont continues en 0, il vient que

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Introduisons la fonction $g \in L^2(I)$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,0[\\ 1 & \text{si } x \in]0,1[\end{cases}$$

Alors la fonction f admet g comme dérivée faible puisque nous avons :

$$\forall\varphi\in\mathscr{C}_c^\infty(I),\qquad \int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

Question 2 : Nous pouvons reprendre les calculs précédents sans expliciter la valeur de f'. Comme f' est continue par morceaux et admet une limite finie alors les intégrales $\int_{-1}^{0} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_{0}^{1} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ existent. On note f' la dérivée définie par morceaux de f :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{f(0^-)\varphi(0^-) - f(0^+)\varphi(0^+)}_{=0} - \int_{-1}^{0} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x - \int_{0}^{1} f'(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$$

On remarque que f' appartient à $L^2(I)$ (continue par morceaux + bornée sur un borné) et c'est terminé.