Examen 1

Les objets électroniques (calculette, tablette, smartphone, etc.) doivent être rangés éteints dans les sacs durant l'épreuve. Tout objet de ce type allumé pendant l'épreuve sera saisi. Les documents papiers autres que les copies et le brouillon ne sont pas admis. L'usage de la couleur rouge est proscrit également. Tout résultat sera justifié avec soin et détail.

3 exercices à résoudre en 2h

Exercice 1 – Du cours

Question 1 : Énoncez la Formule de Green pour deux fonctions u et v dans un ouvert Ω

Question 2 : L'espace éléments finis $\mathbb{P}^1-$Lagrange est noté V_h. À quoi correspond ce h ?

Question 3 : Soit $\varphi_I \in V_h$ la fonction de forme associée au sommet $\mathbf{s}_I$ d'un maillage $\mathscr{T}_h$. Quelle est le support de φ_I ?

Exercice 2 – Formulation faible

Dans cet exercice, on considère le domaine Ω décrit par la figure 1. Soit la fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ et la quantité $k > 0$. On considère le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u + k^2 u & = & f & (\Omega), \\ \partial_{\mathbf{n}} u & = & 0 & (\Gamma = \partial\Omega). \end{array}\right. \tag{1}$$

Le domaine Ω est décomposé en deux parties : $\Omega = \Omega_E \bigcup \Omega_I$. Le rayon $R > 1$ et la fonction f est définie par

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_E \end{cases}.$$

Question 1 : En précisant explicitement l'espace fonctionnel V et sa norme $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$, donnez la formulation variationnelle du problème (1) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v). \end{array}\right. \tag{2}$$

Question 2 : Écrivez un code en language GMSH qui permettrait d'obtenir la géométrie désirée (c'est-à-dire Ω). Vous pouvez fixer $R = 2$ ou à une valeur quelconque (mais > 1 naturellement). Nous précisons et rappelons que :

- *Pour séparer Ω_E et Ω_I dans le fichier de maillage, il faut pour cela définir deux `Physical Surface`.*
- *Nous rappelons quelques syntaxes propre à GMSH :*
  - `Pi` pour obtenir π
  - `Point(i)= {x, y, z, h};`

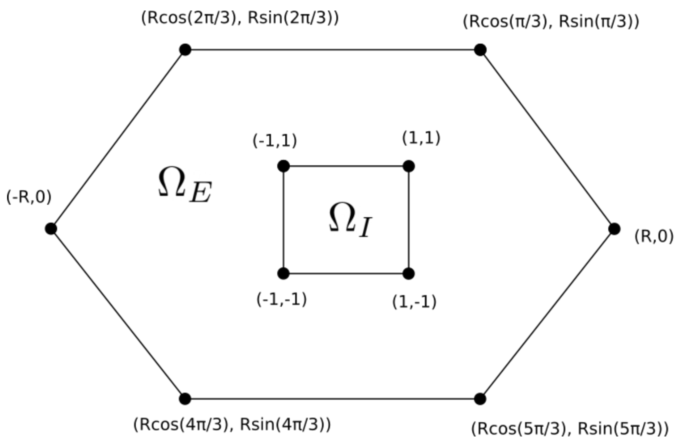


Figure 1: Domaine $\Omega = \Omega_E \bigcup \Omega_I$ de l'Exercice 2. Le rayon R est fixé à 2.

- `Line(i)= {point1, point2};`
- `Curve Loop(i)= {curve1, curve2, ..., curveN};`
- `Plane Surface(i)= {curveloop1, curveloop2, ..., curveloopN};`
- `Physical Surface(i)= {curve1, curve2, ..., curveN};`

Question 3 : On souhaite résoudre le problème (3) à l'aide d'une méthode éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. Rappelez la définition de l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange basé sur une triangulation $\mathscr{T}_h$ (non encore précisée). Cet espace sera noté V_h.

Question 4 : Trois triangulations nous sont présentés sur la Figure 2. Avec justification, dites pour chacune d'elle si elle est, oui ou non, acceptable pour la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$. **Vous pouvez écrire directement sur la page en question et la joindre aux autres feuilles, plutôt que de redessiner chaque maillage (sauf si vous aimez dessiner). N'oubliez pas de noter votre nom et prénom sur cette feuille !**

Question 5 : À partir de maintenant, nous utilisons la triangulation de la Figure 3, que nous appelerons $\mathscr{T}_h$. Quelle est alors la dimension de V_h ?

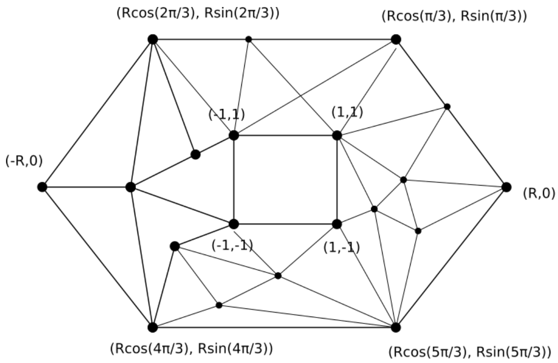
Question 6 : Nous notons $(\varphi_I)_{0\leq I\leq 9}$ les fonctions de V_h telles que $\varphi_I(\mathbf{s}_I) = 1$ et $\varphi_I(\mathbf{s}_J) = 0$ si $I \neq J$. Montrez que cette famille est libre.

Question 7 : Calculez l'expression explicite de toutes les fonctions de forme $(\varphi_I)_{0\leq I\leq 9}$ sur le triangle $K_5 = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_6, \mathbf{s}_2]$.

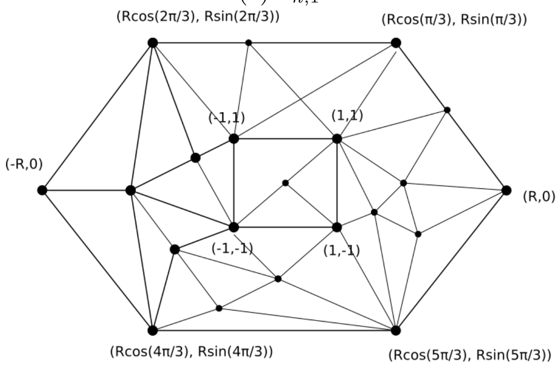
Question 8 : Écrivez la formulation faible discrétisée dans V_h.

Question 9 : Avec soin et justification, montrez que cette formulation faible discrétisée peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire $AU = B$ où $A = -D + k^2M$, avec D la matrice de rigidité et M la matrice de masse. Donnez l'expression des coefficients de A, U et B.

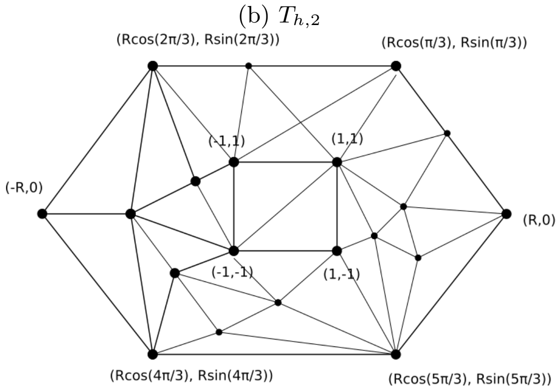
Question 10 : Sur le triangle de référence $\hat{K}$ de sommets $[\widehat{\mathbf{s}}_0, \widehat{\mathbf{s}}_1, \widehat{\mathbf{s}}_2]$, avec $\widehat{\mathbf{s}}_0 = (0,0)$,$\widehat{\mathbf{s}}_1 = (1,0)$ et $\widehat{\mathbf{s}}_2 = (0,1)$, donnez l'expression des 3 fonctions de forme $\hat{\varphi}_i \in \mathbb{P}^1(\hat{T})$ pour $i = 0,1,2$. Calculez la matrice de masse élémentaire (*i.e.* : la valeur de chacun de ses coefficients) - avec justification !



(a) $T_{h,1}$



(b) $T_{h,2}$



(c) $T_{h,3}$

Figure 2: Triangulations de Ω proposées pour la question. **Pour chaque triangulation, écrivez directement sur cette feuille si elle est oui ou non acceptable, en le justifiant, et joignez la feuille aux autres.**

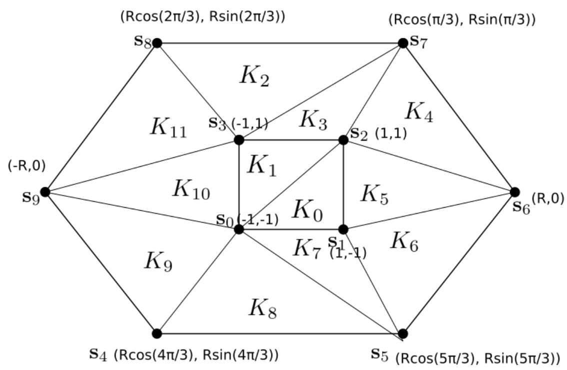


Figure 3: Le maillage choisi.

Question 11 : Donnez l'expression d'une transformation bijective linéaire $T\colon \hat{K} \to K$ et telle que $T(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \mathbf{s}_i$.

Question 12 : Calculez la jacobienne (=déterminant de la matrice jacobienne) de cette transformation dans le cas général, pour un triangle $\hat{K}$ ayant pour sommet $[\mathbf{s}_0^K, \mathbf{s}_1^K, \mathbf{s}_2^K]$.

Question 13 : En utilisant ce résultat et en justifiant, calculez la matrice de masse élémentaire du le triangle K_5.

Question 14 : En pseudo-code, écrivez l'algorithme d'assemblage de la matrice de masse et donnez sa complexité. Dans une matrice de masse M de taille 10×10, placez les coefficients de la matrice de masse élémentaire du triangle K_5 dans la matrice M.

Exercice 3 – Mon ami Dirichlet

Soit l'EDP suivante, avec Ω un ouvert polygonal connexe et $f \in L^2(\Omega)$:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u + u & = & f & (\Omega) \\ u & = & 0 & (\partial\Omega) \end{array}\right.$$

Nous souhaitons résoudre ce problème à l'aide de (surprise !) la méthode des éléments finis $\mathbb{P}^1-$Lagrange.

Question 1 : En précisant explicitement l'espace fonctionnel V et sa norme $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$, donnez la formulation variationnelle du problème (1) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v). \end{array}\right. \tag{3}$$

Question 2 : Nous dicrétisons maintenant V par un espace éléments finis $\mathbb{P}^1$ adapté, noté $V_{h,0}$, quel est-il ?

Question 3 : Supposons que nous ayons abouti à un système linéaire $AU = B$ comme si la condition aux bords était de Neumann homogène. Comment procéderiez-vous pour appliquer la condition de Dirichlet au système linéaire ?