Examen 1 (Correction)

Exercice 1 – Formulation faible

Dans cet exercice, on considère le domaine Ω décrit par la figure 1. Soit la fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ et la quantité $k > 0$. On considère le problème suivant

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u + k^2 u & = & f & (\Omega), \\ \partial_{\mathbf{n}} u & = & 0 & (\Gamma = \partial\Omega). \end{array}\right. \tag{1}$$

Le domaine Ω est décomposé en deux parties : $\Omega = \Omega_E \bigcup \Omega_I$. Le rayon $R > 1$ et la fonction f est définie par

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_I \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_E \end{cases}.$$

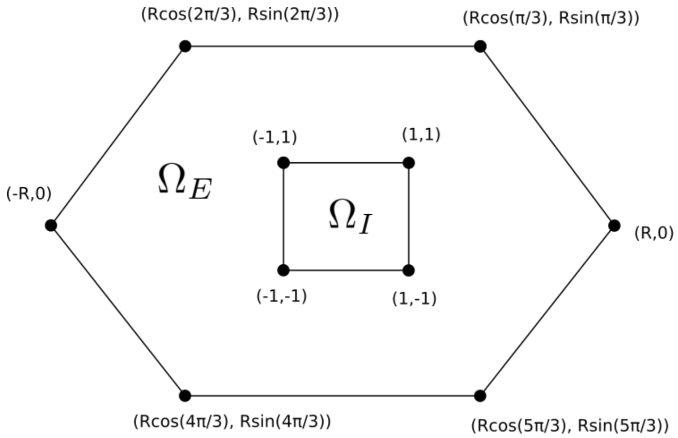


Figure 1: Domaine $\Omega = \Omega_E \bigcup \Omega_I$ de l'Exercice 2. Le rayon R est fixé à 2.

Question 1 : En précisant explicitement l'espace fonctionnel V et sa norme $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$, donnez la formulation variationnelle du problème (1) sous la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v). \end{array}\right. \tag{2}$$

Correction : On multiplie par des fonctions tests v, on intègre sur Ω et on utilise le Théorème de Green :

$$
\begin{aligned}
\Delta u + k^2 u = f &\implies \Delta u v + k^2 u v = f v\\
&\implies \int_\Omega \Delta u v + \int_\Omega k^2 u v = \int_\Omega f v\\
&\implies -\int_\Omega \nabla u \nabla v + \int_{\partial\Omega} \underbrace{(\partial_{\mathbf{n}} u)}_{=0} v + k^2 \int_\Omega u v = \int_\Omega f v\\
&\implies -\int_\Omega \nabla u \nabla v + k^2 \int_\Omega u v = \int_\Omega f v
\end{aligned}
$$

Nous constatons que nous n'avons besoin de dériver u qu'une seule fois. Aucune condition de Dirichlet n'est imposée, l'espace $H^1(\Omega)$ suffira. Nous rappelons sa norme et son produit scalaire usuels :

$$
\|u\|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \|\nabla u\|^2 + \int_\Omega \|u\|^2 \qquad (u,v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u v
$$

La formulation faible s'écrit alors

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que}\\
\forall v \in H^1(\Omega), \quad a(u,v) = \ell(v).
\end{array}
\right.
$$

avec

$$
\begin{array}{rccl}
a(\cdot,\cdot)\colon & H^1(\Omega)\times H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
& (u,v) & \longmapsto & -\displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + k^2 \int_\Omega u v = \int_\Omega f v\\
\ell(\cdot)\colon & H^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\
& v & \longmapsto & \displaystyle\int_\Omega f v
\end{array}
$$

Remarque 0.1. *Lorsqu'on cherche la formulation variationnelle nous multiplions par des fonctions tests v sans se soucier de leur régularité, mais surtout nous ne travaillons (certainement) pas en équivalence, mais en implication uniquement !*

Question 2 : Écrivez un code en language GMSH qui permettrait d'obtenir la géométrie désirée (c'est-à-dire Ω). Vous pouvez fixer $R = 2$ ou à une valeur quelconque (mais > 1 naturellement). Nous précisons et rappelons que :

- *Pour séparer Ω_E et Ω_I dans le fichier de maillage, il faut pour cela définir deux* `Physical Surface`.
- *Nous rappelons quelques syntaxes propre à GMSH :*
  - `Pi` pour obtenir π
  - `Point(i)= {x, y, z, h};`
  - `Line(i)= {point1, point2};`
  - `Curve Loop(i)= {curve1, curve2, ..., curveN};`
  - `Plane Surface(i)= {curveloop1, curveloop2, ..., curveloopN};`
  - `Physical Surface(i)= {curve1, curve2, ..., curveN};`

Correction : Les erreurs classiques sont d'oublier de construire les deux `Curve Loop`, mais aussi d'oublier une `Curve Loop` lors de la construction de la surface Ω_E.

Question 3 : On souhaite résoudre le problème (3) à l'aide d'une méthode éléments finis $\mathbb{P}_1$-Lagrange. Rappelez la définition de l'espace des fonctions $\mathbb{P}_1$-Lagrange basé sur une triangulation $\mathscr{T}_h$ (non encore précisée). Cet espace sera noté V_h.

Correction : Cours. Une erreur qui est revenue est la mauvaise utilisation des quantificateurs. Les deux espaces suivants sont totalement différents :

$$A(\omega) = \left\{f \in \mathscr{C}^0(\overline{\omega}) \;\middle|\; \forall (x,y) \in \omega, \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}; f(x,y) = ax + by + c\right\}$$
$$B(\omega) = \left\{f \in \mathscr{C}^0(\overline{\omega}) \;\middle|\; \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}; \forall (x,y) \in \omega, f(x,y) = ax + by + c\right\}$$

L'ensemble A n'est pas l'ensemble des polynômes de degré 1 sur ω, loin de là ! Tandis que $B = \mathbb{P}^1(\omega)$.

Question 4 : Trois triangulations nous sont présentés sur la Figure 2. Avec justification, dites pour chacune d'elle si elle est, oui ou non, acceptable pour la méthode des éléments finis $\mathbb{P}_1$. **Vous pouvez écrire directement sur la page en question et la joindre aux autres feuilles, plutôt que de redessiner chaque maillage (sauf si vous aimez dessiner). N'oubliez pas de noter votre nom et prénom sur cette feuille !**

Correction : Les trois sont fausses, notamment parce que deux triangles se chevauchent en haut à droite (il manque un point).

Question 5 : À partir de maintenant, nous utilisons la triangulation de la Figure 3, que nous appelerons $\mathscr{T}_h$. Quelle est alors la dimension de V_h ?

Correction : La dimension est égale au nombre de sommets soit 10.

Question 6 : Nous notons $(\varphi_I)_{0\leq I\leq 9}$ les fonctions de V_h telles que $\varphi_I(\mathbf{s}_I) = 1$ et $\varphi_I(\mathbf{s}_J) = 0$ si $I \neq J$. Montrez que cette famille est libre.

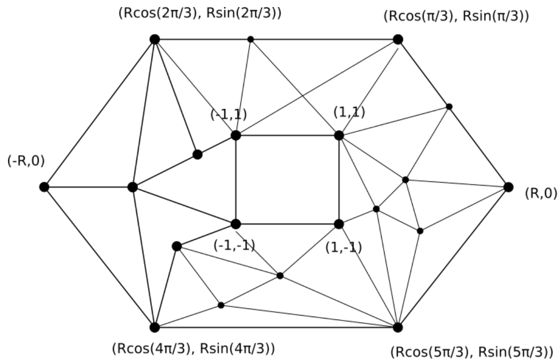
Correction : Soit 10 scalaires α_I tels que $\sum_I \alpha_I\varphi_I = 0$, alors nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_I \alpha_I\varphi_I = 0 &\implies \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \sum_I \alpha_I\varphi_I(x,y) = 0\\
&\implies \forall J = 0,\ldots,9, \sum_I \alpha_I \underbrace{\varphi_I(\mathbf{s}_J)}_{=\delta_{IJ}} = 0\\
&\implies \forall J = 0,\ldots,9, \alpha_J \underbrace{\varphi_J(\mathbf{s}_J)}_{=1} = 0\\
&\implies \forall J = 0,\ldots,9, \alpha_J = 0
\end{aligned}$$

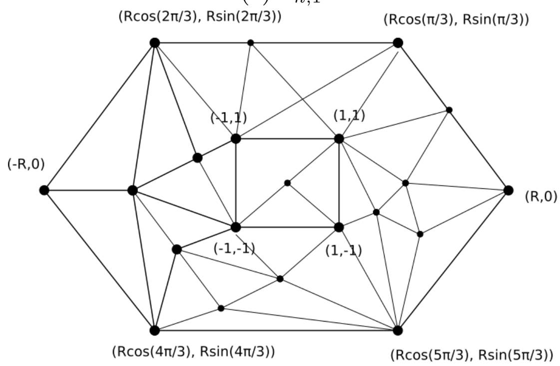
Remarque 0.2. *Surtout, ne travaillez pas en équivalence mais en implication uniquement (la ligne 2 n'est pas équivalente à la ligne 1 !).*

Question 7 : Calculez l'expression explicite de toutes les fonctions de forme $(\varphi_I)_{0\leq I\leq 9}$ sur le triangle $K_5 = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_6, \mathbf{s}_2]$.

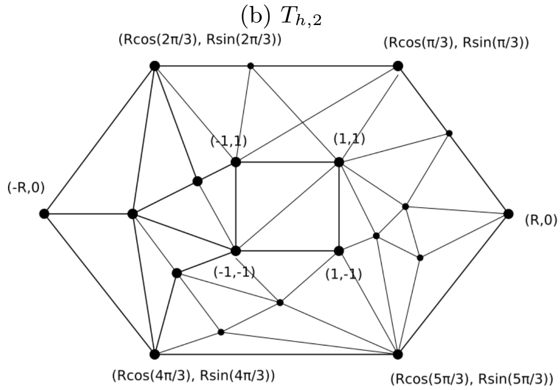
Correction : Seules les fonctions φ_1, φ_6 et φ_2 ne sont pas identiquement nulles sur K_5. Nous pouvons les calculer grâce à la définition des fonctions de forme. Nous écrivons $\varphi_1(x,y) = ax+by+c$, nous rappelons que $\mathbf{s}_1 = (1,-1)$, $\mathbf{s}_2 = (1,1)$ et $\mathbf{s}_6 = (2,0)$. Nous avons alors



(a) $T_{h,1}$



(b) $T_{h,2}$



(c) $T_{h,3}$

Figure 2: Triangulations de Ω proposées pour la question. **Pour chaque triangulation, écrivez directement sur cette feuille si elle est oui ou non acceptable, en le justifiant, et joignez la feuille aux autres.**

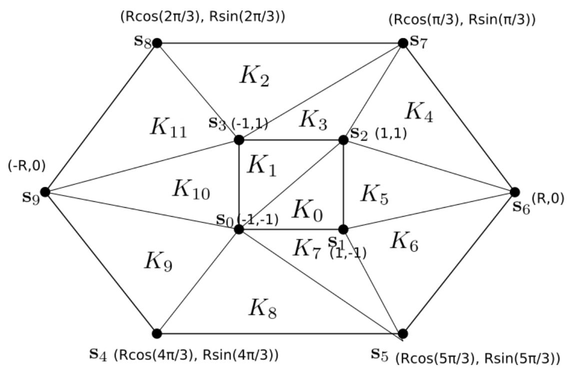


Figure 3: Le maillage choisi.

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi_1(\mathbf{s}_1)=1\\ \varphi_1(\mathbf{s}_2)=0\\ \varphi_1(\mathbf{s}_6)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r}a-b+c=1\\ a+b+c=0\\ 2a+c=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r}-a-b=1\\ a=b\\ c=-2a\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{r}b=-1/2\\ a=-1/2\\ c=1\end{array}\right.$$

Nous obtenons, pour $(x,y)\in K_5$, $\varphi_1(x,y)=-x/2-y/2+1$ sur K_5. Nous procédons de même pour φ_2 et φ_6 pour obtenir

$$\begin{cases}\varphi_1|_{K_5}(x,y)=-x/2-y/2+1\\ \varphi_2|_{K_5}(x,y)=-x/2+y/2+1\\ \varphi_6|_{K_5}(x,y)=x-1\end{cases}$$

Question 8 : Écrivez la formulation faible discrétisée dans V_h.

Correction : Il suffit de réécrire la formulation faible dans V_h :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Trouver } u_h\in V_h \text{ tel que}\\ \forall v_h\in V_h,\quad a(u_h,v_h)=\ell(v_h).\end{array}\right.$$

Question 9 : Avec soin et justification, montrez que cette formulation faible discrétisée peut s'écrire sous la forme d'un système linéaire $AU=B$ où $A=-D+k^2M$, avec D la matrice de rigidité et M la matrice de masse. Donnez l'expression des coefficients de A, U et B.

Correction : Comme $(\varphi_I)_I$ est une base de V_h, nous avons

$$\forall v\in V_h,\quad a(u_h,v_h)=\ell(v_h) \iff \forall I=0,\dots,N_s-1,\quad a(u_h,\varphi_I)=\ell(\varphi_I).$$

D'autre part nous pouvons décomposer u_h de manière unique dans cette base de V_h :

$$u_h=\sum_J u_J\varphi_J.$$

Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
&\forall I = 0, \ldots, N_s - 1, a(u_h, \varphi_I) = \ell(\varphi_I) \\
\iff &\forall I = 0, \ldots, N_s - 1, a\left(\sum_J u_J \varphi_J, \varphi_I\right) = \ell(\varphi_I) \\
\iff &\forall I = 0, \ldots, N_s - 1, \sum_J a(\varphi_J, \varphi_I) u_J = \ell(\varphi_I) \qquad \text{Linéarité à gauche de } a \\
\iff &\forall I = 0, \ldots, N_s - 1, (AU)_I = B_I \\
\iff &AU = B
\end{aligned}$$

Où nous avons introduit la matrice A et les vecteurs B et U définis par

$$A_{IJ} = a(\varphi_J, \varphi_I), \qquad B_I = \ell(\varphi_I) \quad \text{et} \quad U_I = u_h(I) = u_I.$$

Question 10 : Sur le triangle de référence $\hat{K}$ de sommets $[\widehat{\mathbf{s}}_0, \widehat{\mathbf{s}}_1, \widehat{\mathbf{s}}_2]$, avec $\widehat{\mathbf{s}}_0 = (0,0)$,$\widehat{\mathbf{s}}_1 = (1,0)$ et $\widehat{\mathbf{s}}_2 = (0,1)$, donnez l'expression des 3 fonctions de forme $\hat{\varphi}_i \in \mathbb{P}^1(\hat{T})$ pour $i = 0,1,2$. Calculez la matrice de masse élémentaire (*i.e.* : la valeur de chacun de ses coefficients) - avec justification !

Correction : Du cours

Question 11 : Donnez l'expression d'une transformation bijective linéaire $T\colon \hat{K} \to K$ et telle que $T(\widehat{\mathbf{s}}_i) = \mathbf{s}_i$.

Correction : Du cours

Question 12 : Calculez la jacobienne (=déterminant de la matrice jacobienne) de cette transformation dans le cas général, pour un triangle $\hat{K}$ ayant pour sommet $[\mathbf{s}_0^K, \mathbf{s}_1^K, \mathbf{s}_2^K]$.

Correction : Du cours

Question 13 : En utilisant ce résultat et en justifiant, calculez la matrice de masse élémentaire du le triangle K_5.

Correction : Par changement de variable :

$$M^e_{i,j} = \int_{K_5} \varphi_j^p \varphi_i^p = |\det(J_5)| \int_{\hat{K}} var\hat{phi}_j \hat{\varphi}_i = |\det(J_5)| \hat{M}_{i,j}.$$

On a calculé à la question précédente que $|\det(J_5)| = 2|K_5| = 2(R-1) = 2$ et on en conclut que

$$M^e_{i,j} = 2\hat{M}_{i,j}.$$

Question 14 : En pseudo-code, écrivez l'algorithme d'assemblage de la matrice de masse et donnez sa complexité. Dans une matrice de masse M de taille 10×10, placez les coefficients de la matrice de masse élémentaire du triangle K_5 dans la matrice M.

Correction : Du cours pour l'algorithme. Pour le placement dans la matrice M des coefficients de la matrice élémentaire M_5^e du triangle $K_5 = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_6, \mathbf{s}_2]$. Le coefficient $M_5^e(i,j)$ sera placé en (I,J) selon la règle suivante

i	I
0	1
1	6
2	2

Exercice 2 – Mon ami Dirichlet

Soit l'EDP suivante, avec Ω un ouvert polygonal connexe et $f \in L^2(\Omega)$:

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \quad (\Omega) \\ u &= 0 \quad (\partial\Omega) \end{cases}$$

Nous souhaitons résoudre ce problème à l'aide de (surprise !) la méthode des éléments finis $\mathbb{P}^1-$Lagrange.

Question 1 : En précisant explicitement l'espace fonctionnel V et sa norme $\|\cdot\|_V$, $a(\cdot,\cdot)$ et $\ell(\cdot)$, donnez la formulation variationnelle du problème (1) sous la forme

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ \forall v \in V, \quad a(u,v) = \ell(v). \end{cases} \tag{3}$$

Correction : Après multiplication par une fonction test v et intégration sur Ω, nous obtenons

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv - \int_{\partial\Omega} (\partial_{\mathbf{n}} u) v = \int_\Omega fv$$

Comme u vérifie une condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$, nous imposons alors à v une condition de Dirichlet homogène sur $\partial\Omega$. Attention, $\partial_{\mathbf{n}} u \neq 0$ sur $\partial\Omega$!

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv, \qquad \forall v; v|_{\partial\Omega} = 0.$$

Nous avons besoin de dériver u une seule fois, et nous devons imposer à u d'être nul sur $\partial\Omega$. Nous travaillons donc dans $H^1_0(\Omega)$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in H^1_0(\Omega) \text{ tel que} \\ \forall v \in H^1_0(\Omega), \quad a(u,v) = \ell(v). \end{cases}$$

avec

$$\begin{array}{rccl} a(\cdot,\cdot): & H^1_0(\Omega) \times H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv \\ \ell(\cdot): & H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \int_\Omega fv \end{array}$$

Question 2 : Nous dicrétisons maintenant V par un espace éléments finis $\mathbb{P}^1$ adapté, noté $V_{h,0}$, quel est-il ?

Correction : Nous prenons l'espace éléments finis $\mathbb{P}^1$ classique avec, en plus, la condition de Dirichlet homogène imposée :

$$\begin{aligned} V_{h,0} &= \left\{ v \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \;\middle|\; \forall K \in \mathscr{T}_h, v|_K \in \mathbb{P}^1(K) \text{ et } v|_{\partial\Omega} = 0 \right\} \\ &= \left\{ v \in V_h \;|\; v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Question 3 : Supposons que nous ayons abouti à un système linéaire $AU = B$ comme si la condition aux bords était de Neumann homogène. Comment procéderiez-vous pour appliquer la condition de Dirichlet au système linéaire ?

Correction : Voir cours.